CHUYÊN ĐỀ 1

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

§ 1. TỌA ĐỘ ĐIỂM – TỌA ĐỘ VÉCTƠ

1.1. Các định nghĩa và tính chất cơ bản

Xét hệ trục tọa độ vuông góc Oxy với hai véctơ đơn vị trên các trục Ox, Oy lần lượt là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Ta có

- $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- $\vec{a} = (a_1;a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$
- $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- Cho $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$. Khi đó:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

$$k\vec{a} \pm l\vec{b} = (ka_1 \pm lb_1; ka_2 \pm lb_2)$$

1.2. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số cho trước

Nếu điểm M chia đoạn AB theo tỷ số $k \neq 1$, tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, thì:

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k},\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}$$

1.3. Tọa độ trung điểm – Tọa độ trọng tâm

Nếu I là trung điểm của AB thì:

- $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2},\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (M bất kỳ)

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

- $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + y_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (M bất kỳ)

1.4. Môđun véctơ – tích vô hướng và góc giữa hai véctơ

Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$

- Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$
- Môđun : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{a}|^2 = a^2$
- Góc: $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

1.5. Hai véctơ cùng phương – hai véctơ vuông góc

Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$

- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

1.6. Diện tích tam giác

- Diện tích tam giác tạo bởi hai véctơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$

$$S = \frac{1}{2}|D| \text{ với } D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

1.7. Tọa độ chân các đường phân giác của tam giác

Cho tam giác ABC có chân các phân giác ngoài, trong ứng với đỉnh A lần lượt là D và E. Ta có: $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = \dfrac{AB}{AC}$ và $\dfrac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = -\dfrac{AB}{AC}$

§ 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG

2.1. Phương trình đường thẳng

Ta có bảng tóm tắt sau:

Stt	Dạng đường thẳng	Phương trình
1	Qua $M(x_0;y_0)$ và có véctơ chỉ phương: $\vec{a} = (a_1; a_2)$	1) tham số: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}$ 2) chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$
2	Qua $M(x_0;y_0)$ và có pháp véctơ: $\vec{n} = (A; B)$	− Phương trình: $Ax + By + C = 0$ (có thể viết: $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$)
3	Qua 2 điểm A, B	$\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

4	Chắn 2 trục tọa độ bởi 2 điểm A(a;0), B(0;b).	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
5	Song song với (D): $Ax + By + C = 0$	– Phương trình: $Ax + By + C' = 0$ – Tìm C' dựa vào giả thiết.
6	Vuông góc với (D): $Ax + By + C = 0$	– Phương trình $Bx - Ay + C' = 0$ – Tìm C' dựa vào giả thiết.
7	Tìm theo hệ số góc k	– Giả sử đường thẳng có hệ số góc k. – Nếu đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ thì có phương trình dạng: $y = k(x - x_0) + y_0$ – Tìm k thỏa bài toán.
8	Đường thẳng (D) thuộc chùm xác định bởi 2 đường thẳng cắt nhau (D_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, (D_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	1) dạng 2 tham số: $m(A_1x + B_1y + C_1) + n(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ 2) dạng 1 tham số: $A_1x + B_1y + C_1 + q(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (Điều kiện (D) $\neq$ (D_2))

2.2. Khoảng cách

Cho $M(x_0, y_0)$, $M'(x', y')$; (D): $Ax + By + C = 0$.

Stt	Dạng khoảng cách (k/c)	Công thức tính
1	K/c giữa 2 điểm $M(x_0, y_0), M'(x', y')$	$MM' = \sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}$
2	K/c hình học từ M đến (D)	$d(M,(D)) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
3	K/c giữa 2 đường thẳng song song (D) và (D'): $Ax + By + C' = 0$	$d(D,D') = \frac{\lvert C'-C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2.3. Xác định góc

Stt	**Dạng**	**Công thức tính**
1	Góc giữa 2 véctơ: $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)$	$Cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$
2	Góc nhọn α tạo bởi (D_1): $A_1x+B_1y+C_1=0$, (D_2): $A_2x+B_2y+C_2=0$	$Cos\alpha=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$
3	Góc α = (D_1, D_2) tạo bởi (D_1) có hệ số góc k_1 và (D_2) có hệ số góc k_2.	$tan\alpha=\left\lvert\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$

2.4. Đường phân giác các góc tạo bởi 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng cắt nhau (D_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (có pháp véctơ $\overrightarrow{n_1}$), và (D_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (có pháp véctơ $\vec{n}_2$). Các đường phân giác các góc tạo bởi 2 đường thẳng (D_1), (D_2) được xác định bởi:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Chú ý: Các trường hợp dấu $\pm$ sẽ xác định là đường phân giác góc tù hay nhọn:

Dấu của $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}$	**Phân giác góc nhọn**	**Phân giác góc tù**
−	+	−
+	−	+

BÀI TẬP

1. Cho 3 điểm A(1,5); B(4,-1); C(-4,-5)
   a) CMR: 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.
   b) Tìm điểm E để ABE là tam giác đều.
   c) Tìm điểm F để ABCF là hình thang cân.
   d) Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
2. Tam giác ABC có A(1,-1), B(3,-3) và trọng tâm G thuộc Ox. Tìm toạ độ đỉnh C biết rằng C thuộc Oy.
3. Cho tam giác ABC có A(1, 1), B(-2, 3), C(2, 1).
   a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Xét xem tam giác ABC là tam giác vuông nhọn hay tù.

d) Tìm điểm D trên cạnh BC để diện tích tam giác ABD gấp hai lần diện tích tam giác ADC.

4. Tìm toạ độ 3 đỉnh của một tam giác có toạ độ trung điểm 3 cạnh lần lượt là: (-1,-1), (1,9), (9,1).

Đs:(11,11), (7,-9), (-9,7).

5. Tim tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD khi biết A(1,-1), tâm I (3/2,3/2) và $x_B < 0$.

Đs: B(-1,2); C(2,4), D(4,1).

6. Cho 4 điểm A(3,1); B(-1,1); C(1,3), D(1,-1). Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.Từ đó suy ra 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn .

7. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành ABCD biết A(-1,2), B(2,5), C(3,4).

Đs: D(0,1).

8. Cho ΔABC biết A(2,5) và B(4,1). Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng (d): x - 4y + 6 = 0 để tam giác ABC cân tại C.

Đs: C(0,3/2).

9. Cho A(2,5) và B(4,1). Lập phương trình đường trung trực đoạn AB.

10. Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k = -3/4 và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 24.

Đs: y = (-3/4)x + 6 hoặc y = (-3/4)x - 6.

11. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC có đỉnh A(-4,2) và các trung tuyến qua B, C lần lượt là: 5x - 2y + 12 = 0; 3x - 2y + 2 = 0.

Đs: (AB): 13x - 4y + 60 = 0; (AC): x - 10y + 24 = 0; (BC): 53x - 26y + 12 = 0.

12. Cho A(1,2). Tìm điểm B trên đường thẳng y = 4 và điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC là tam giác thoả mãn :

a) Tam giác ABC vuông cân đỉnh A,

b) Tam giác ABC đều.

13. Cho các điểm A(-2,0); B(2,6); C(4,2). Viết phương trình cạnh AC, đường cao BH và trung tuyến BM của tam giác ABC.

Đs: x - 3y + 2 = 0; 5x - y - 4 = 0; 3x + y - 12 = 0.

14. Cho tam giác ABC có đỉnh A(-1,-3)

a) Hai đường cao BH, CK có phương trình (BH): $5x + 3y - 25 = 0$, (CK): $3x + 8y - 12 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C.

b) Tìm tọa độ đỉnh B và C biết rằng trung trực của AB có phương trình: $3x+2y-4 = 0$ và toạ độ trọng tâm tam giác ABC là G(4,-2).

Đs: a) B(2, 5) , C(4, 0); b) B(5, 1), C(8, -2)

15. Hình vuông có một đỉnh (-4, 5) và một đường chéo có phương trình: $7x - y + 8 = 0$. Tìm phương trình các cạnh hình vuông.

Đs: AD: $y = (3/4)x + 8$, AB: $y = (-4/3)x - 1/3$;
BC: $y = (3/4)x + 7/4$, CD: $y = (-4/3)x + 8$.

16. Tính diện tích tam giác ABC có đỉnh B(3,0) đường cao AH và trung tuyến CM lần lượt có phương trình: $4x - 3y = 0$ và $4x + y + 1 = 0$.

Đs: S = 247/16 (đvdt)

17. Viết phương trình cạnh AC của tam giác ABC có B(-2,9) đường cao và phân giác trong qua A, C lần lượt có phương trình: $2x - 3y + 18 = 0$; $y + 2 = 0$.

Đs: (AC):$3x - 2y -20 = 0$.

18. Cho (d): $3x + y - 1 = 0$ và (d_1): $2x - y = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng (D) đối xứng với (d) qua (d_1).

Đs:(D): $x - 3y + 1 = 0$.

19. Cho tam giác ABC cân tại A với (AB): $x - y + 2 = 0$; (BC): $x + 3y = 0$. Viết phương trình cạnh AC, biết AC đi qua M(3,1).

Đs: $y = -7x + 22$.

20. Cho A(0,-4); B(3,0); C(0,6). Tính khoảng cách h từ C tới phân giác trong của góc A, của tam giác ABC. Đs: $h=\sqrt{10}$.

21. Cho biết diện tích tam giác ABC là S=3/2(đvdt) hai đỉnh A(2,-3), B(3,-2) và trọng tâm G thuộc đường thẳng: $3x - y - 8 = 0$. Tìm toạ độ C.

Đs: (-2,-10),(1,-1).

22. Hai cạnh của tam giác có phương trình $2x - y = 0$, $5x - y = 0$, trung điểm của một cạnh M(3;9). Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Đs: (0;0), (4; 8), (2;10).

23. Hai cạnh của tam giác có phương trình $3x - 2y +1 = 0$ và $x - y + 1 = 0$, đường trung tuyến ứng với cạnh thứ nhất có phương trình $2x - y - 1 = 0$. Hãy viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác.

Đs: $5x - 3y -1 = 0$.

24. Một cạnh của tam giác có phương trình x - 2y + 7 = 0, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh kia có phương trình x + y - 5 = 0, 2x + y - 11 = 0. Viết phương trình hai cạnh còn lại.

Đs: 16x + 13y - 68 = 0 và 17x + 11y - 106 = 0.

25. Viết phương trình các cạnh của hình bình hành ABCD biết tâm I(1,6), các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt qua các điểm P(3,0), Q(6;6), R(5,9), S(-5,4).

Đs: AB: x + 2y - 3 = 0, BC: 2x - y - 6 = 0;

CD: x + 2y - 23 = 0, DA: 2x - y + 14 = 0.

26. Cho tam giác ABC có A(4,6), B(-4,0), C(-1,-4). Viết phương trình các đường cao và tìm tọa độ trực tâm của tam giác.

Đs: x + 2y + 4 = 0, 3x - 4y +12 = 0, 4x + 3y + 16 = 0, H(-4,0).

27. Tam giác ABC có A(-6,2), B(2,-2) và trực tâm H(1,2).Tìm tọa độ đỉnh C.

Đs: C(2,4).

28. Hai cạnh của tam giác có phương trình x + 3y - 1 = 0, 3x + 5y - 6 = 0, gốc tọa độ là trực tâm. Tìm phương trình cạnh thứ ba.

Đs: 39x - 9y - 4 = 0.

29. Viết phương trình các cạnh của hình thang cân biết trung điểm các đáy là (1,1) và (2,8) và hai điểm (4,3) , (-15, 14) lần lượt trên hai cạnh bên.

Đs: đáy: x + 7y - 8 = 0, x + 7y - 58 = 0;

bên: 3x - 4y - 24 = 0, 4x + 3y + 18 = 0.

30. Biết phương trình một cạnh của hình thoi là x + 3y - 8 = 0, và phương trình một đường chéo là 2x + y + 4 = 0. Viết phương trình các cạnh còn lại biết rằng cạnh song song với cạnh đã cho đi qua điểm (-9, -1).

Đs: x + 3y + 12 = 0; 3x - y + 16 = 0; 3x - y - 4 = 0.

31. Cho (d): 2x + y +1 = 0 và 2 điểm A(0, 3); B(1, 5).

a) Tìm điểm M trên (d) sao cho MA+MB đạt nhỏ nhất.

b) Tìm điểm M trên (d) sao cho |MA-MB| đạt nhỏ nhất.

c) Tìm điểm M trên (d) sao cho |MA-MB| đạt lớn nhất.

Đs: i) M(-1,1); iii) M(-9/5, 13/5).

32. (TSĐH khối A-2002)

Trong mp với hệ tọa độ Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

Đs: $G\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3},\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) hay\ G\left(\dfrac{-1-4\sqrt{3}}{3},\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

33. (TSĐH khối B-2002)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, phương trình đường thẳng AB: x - 2y + 2 = 0 và AB = 2AD. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng A có hoành độ âm.

Đs: A(-2, 0), B(2, 2), C(3,0), D(-1, -2)

34. (TSĐH khối B-2003)

Trong hệ tọa độ Oxy cho ΔABC vuông tại A, có AB = AC. Biết M(1,-1) là trung điểm cạnh BC và G(2/3, 0) là trọng tâm ΔABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

Đs: A(0, 2), B(4, 0), C(-2, -2) hay C(4, 0), B(-2, -2).

35. (TSĐH khối A-2004) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A(0, 2), B($-\sqrt{3},-1$). Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔOAB.

Đs: H($\sqrt{3},-1$), I($-\sqrt{3},1$).

§ 3. ĐƯỜNG TRÒN

3.1. Phương trình đường tròn

- Đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính R có phương trình chính tắc:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- Dạng khai triển:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$. Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3.2. Phương tích của 1 điểm đối với đường tròn

Cho điểm $M(x_M;y_M)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Phương tích của M đối với (C) được xác định bởi:

$$P_M = x_M^2 + y_M^2 - 2ax_M - 2by_M + c$$

Chú ý

- $P_M > 0$: M nằm ngoài (C).

- $P_M = 0$: M nằm trên (C)
- $P_M < 0$: M nằm trong (C).

3.3. Sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn

Bài toán: xét vị trí tương đối giữa đường thẳng (D) và đường tròn (C)

$$(D): Ax + By + C = 0 \text{ và } (C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

✍ **Phương pháp**:

- Định tâm I(a;b) và bán kính R của đường tròn (C).
- Tính khoảng cách từ I đến (D): $d = \dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Biện luận:
  - $d < R \Leftrightarrow$ (D) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.
  - $d = R \Leftrightarrow$ (D) tiếp xúc với (C) tại 1 điểm .
  - $d > R \Leftrightarrow$ (D) và (C) không có điểm chung.

3.4. Tiếp tuyến của đường tròn

1) Tiếp tuyến của đường tròn tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$

Nếu (C) có phương trình dạng chính tắc thì tiếp tuyến có phương trình

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = R^2$$

Nếu (C) có phương trình dạng khai triển thì tiếp tuyến có phương trình

$$x_0x + y_0y - (x + x_0)a - (y + y_0)b + c = 0$$

2) Tìm điều kiện để đường thẳng (D) tiếp xúc với đường tròn (C)

✍ **Cách 1 (PP giải tích):**

- Xác định phương trình hoành độ (tung độ) giao điểm của (D) với (C).
- Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm kép.

✍ **Cách 2 (PP hình học):**

- Xác định tâm I và bán kính R của (C).
- Tính khoảng cách d = d(I,D).
- Điều kiện để (D) tiếp xúc (C): d = R

3.5. Sự tương giao giữa 2 đường tròn

Bài toán: Biện luận số giao điểm của 2 đường tròn

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_2 = 0$$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$

✍ **Phương pháp**:

- Xác định tâm I_1, I_2 và bán kính R_1, R_2 lần lượt của (C_1), (C_2).
- Tính I_1I_2, $R_1 + R_2$, $|R_1 - R_2|$.
- Biện luận:
  a. $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc trong với (C_2) tại một điểm.
  b. $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài với (C_2) tại một điểm.
  c. $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2) tại hai điểm.
  d. $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) chứa nhau.
  e. $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

3.6. Phương trình trục đẳng phương của 2 đường tròn

Cho 2 đường tròn:

(C_1): $x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_2 = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$

Trục đẳng phương của 2 đường tròn (tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với cả 2 đường tròn) có phương trình:

(Δ): $2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c_1 - c_2 = 0$

BÀI TẬP

1. Lập phương trình đường tròn (Ω) ngoại tiếp ΔABC với $A(5,3)$, $B(6,2)$, $C(3,-1)$. Tìm phương tích của điểm $I(1,1)$ đối với đường tròn (Ω).

2. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(1,0), B(3,0) và tiếp xúc với đường thẳng (d): $x - y + 1 = 0$.

Đs: $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 50$. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

3. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên (d): $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng (d_1): $x + y + 4 = 0$; (d_2): $7x - y + 4 = 0$.

Đs: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$, $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$.

4. Cho (C): $x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$. CMR (C) cắt (C') tại 2 điểm phân biệt A, B. Viết pt đường tròn (Ω) qua A, B và gốc toạ độ.

Đs: (Ω): $x^2 + y^2 - 12x - 2y = 0$.

5. Cho A(0,4), B(-3,0) và O là gốc tọa độ.

(a) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

(b) Viết phương trình đường tròn bàng tiếp trong góc A, của tam giác ABC.

Đs: (a) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$. (b) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

6. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của các cặp đường tròn:

(a) (C_1): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và (C_2): $(x+3)^2 + (y+6)^2 = 4$.

(b) (C_1): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$.

Đs: b) Có 4 tiếp tuyến: $y = 2$; $x = 5$; $y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}x - \frac{33 \pm 9\sqrt{17}}{8}$

7. Cho 2 đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$,

và (C'): $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$, có tâm là I và J.

(a) CMR: (C)và (C') tiếp xúc ngoài tại H. Tìm toạ độ tiếp điểm H.

(b) Gọi (d) là một tiếp tuyến chung của (C) và (C') không đi qua H. Tìm toạ độ giao điểm K của (d) và đường thẳng IJ .Viết phương trình đường tròn (ω) đi qua K và tiếp xúc với 2 đường tròn (C) và (C') đã cho tại H.

Đs: (a) HD $\overrightarrow{IH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HJ} \Rightarrow H\left(\frac{19}{5}, \frac{7}{5}\right)$; (b) $K(11, 11)$, $(\omega): \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$.

8. Cho họ đường thẳng (d): $(1-m^2)x + 2my + m^2 - 4m + 1 = 0$. CMR khi m thay đổi, (d) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Đs: $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

9. Cho (C): $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ và điểm M(4,1).

(a) Chứng minh rằng M nằm bên trong đường tròn (C).

(b) Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Đs: (b) $y = 1$.

10. Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$.

Đs: $4x - 3y = 0$; $y = 0$.

11. Cho (C): $x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.
(a) Định tâm I, I'và bán kính R, R' lần lượt của 2 đường tròn trên.
(b) CMR: 2 đương tròn đã cho cắt nhau tại 2 điểm A(0,2) và (8/5,26/5).
Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt 2 đường tròn đã cho theo 2 dây có tổng chiều dài lớn nhất

12. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:
(a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng: $2x - y + 11 = 0$.
(b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $x - 2y + 33 = 0$.
(c) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $2x + y - 55 = 0$ một góc 45^o.
(d) Tiếp tuyến tạo với các trục tọa độ một tam giác cân.

13. Cho (C): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:
(a) Tiếp tuyến tại điểm các hoành độ bằng 1.
(b) Tiếp tuyến qua điểm (0, 2).
(c) Tìm tập hợp các điểm mà từ đó kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

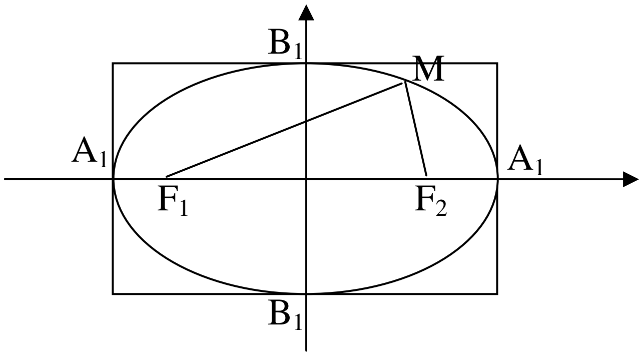
§ 4. ĐƯỜNG ELÍP

4.1. Phương trình chính tắc

1) Elíp có tâm trùng với góc tọa độ O

a) Trục lớn A_1A_2 nằm trên Ox

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (với } b^2 = a^2 - c^2, a > b)$$



- Tiêu điểm : $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.
- Trục lớn : $A_1A_2 = 2a$.
- Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$.
- Đỉnh trục lớn : $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$.
- Đỉnh trục nhỏ: $B_1(0; -b)$, $A_2(0; b)$.
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$
- Diện tích: $S = ab\pi$
- Bán kính qua tiêu của M:

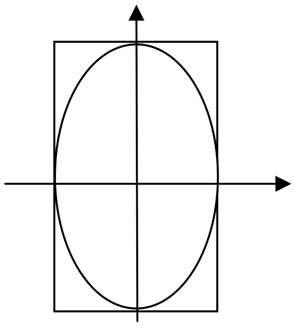
  $r_1 = a + ex_M$

  $r_2 = a - ex_M$
- Đường chuẩn :

  (Δ_1): $x = -\frac{a}{e}$; (Δ_1): $x = \frac{a}{e}$.

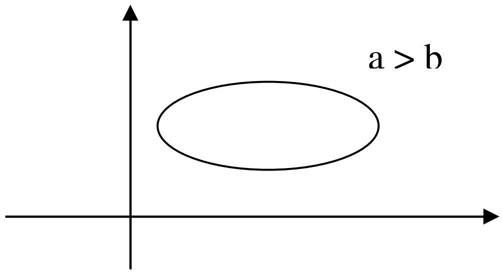
b) Trục lớn B_1B_2 nằm trên Oy (a < b)

(tương tự trường hợp a), chỉ đổi vai trò của a và b cho nhau)



2) (E) có tâm I($\alpha;\beta$) $\neq$O(0; 0)

$$(E): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



- Tiêu điểm : $F_1(\alpha - c;\ \beta)$, $F_2(\alpha + c;\ \beta)$.
- Đỉnh trục lớn : $A_1(\alpha - a;\ \beta)$, $A_2(\alpha + a;\ \beta)$.
- Đỉnh trục nhỏ: $B_1(\alpha;\ \beta - b)$, $A_2(\alpha;\ \beta + b)$.

4.2. Tiếp tuyến với elip

1) Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M_0(x_0, y_0)$

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow (T): \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$(E): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \rightarrow (T): \frac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2} + \frac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2} = 1$$

2) Điều kiện tiếp xúc

Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng (Δ) $Ax + By + C = 0$

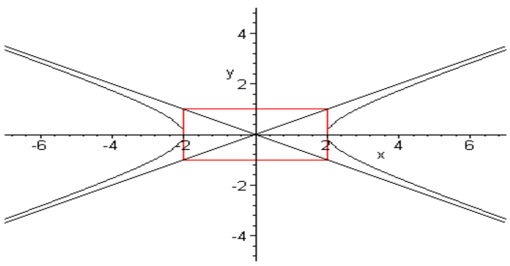
$$\boxed{(\Delta) \text{ tiếp xúc với (E)} \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2}$$

§ 5. ĐƯỜNG HYPERBOL

5.1. Phương trình chính tắc của Hyperpol (H)

1) (H) có tâm trùng với góc tọa độ O:

a) Trục lớn A_1A_2 nằm trên Ox:



$$\boxed{(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (với } b^2 = c^2 - a^2)}$$

- Tiêu điểm : $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.
- Trục thực : $A_1A_2 = 2a$.
- Trục ảo : $B_1B_2 = 2b$.
- Đỉnh trục thực: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$.
- Đỉnh trục ảo: $B_1(0; -b)$, $A_2(0; b)$.
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$.
- Bán kính qua tiêu của M:

  + Nếu $x_M > 0$: $r_1 = MF_1 = ex_M + a$; $r_2 = ex_M - a$.

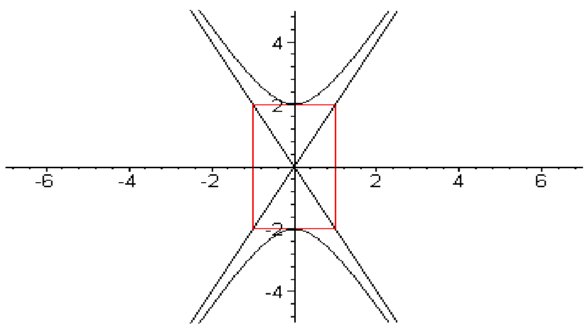
  + Nếu $x_M < 0$: $r_1 = MF_1 = -ex_M - a$; $r_2 = -ex_M + a$.
- Đường chuẩn :

$$(\Delta_1): x = \frac{a}{e}; (\Delta_2): x = -\frac{a}{e}.$$

- Tiệm cận : $y = \pm\frac{b}{a}x$ hay $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

b) Trục lớn B_1B_2 nằm trên Oy: a < b

(tương tự trường hợp b), chỉ đổi vai trò của a và b cho nhau).



2) (H) có tâm $I(\alpha;\beta) \neq O(0; 0)$

$$\boxed{(H): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$$

- Tiêu điểm : $F_1(\alpha - c; \beta)$, $F_2(\alpha + c; \beta)$.

- Đỉnh trục thực: $A_1(\alpha - a;\ \beta)$, $A_2(\alpha + a;\ \beta)$.
- Đỉnh trục ảo: $B_1(\alpha;\beta - b)$, $A_2(\alpha;\beta + b)$.

5.2. Tiếp tuyến với Hyperbol

1) Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M_0(x_0, y_0)$

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow (T): \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$(H): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \rightarrow (T): \frac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2} - \frac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2} = 1$$

2) Điều kiện tiếp xúc

Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng (Δ) $Ax + By + C = 0$.

$$\boxed{(\Delta) \text{ tiếp xúc với (H)} \Leftrightarrow A^2a^2 - B^2b^2 = C^2}$$

§ 6. ĐƯỜNG PARABOL

6.1. Các dạng phương trình chính tắc của Parabol

Ph.trình ch.tắc	Tiêu điểm	Đường chuẩn	Trục đ. xứng
$y^2 = 2px$	F(p/2 ; 0)	x = - p/2	Ox
$y^2 = -2px$	F(- p/2 ; 0)	x = p/2	Ox
$x^2 = 2py$	F(0 ; p/2)	y= -p/2	Oy
$x^2 = -2py$	F(0 ; -p/2)	y = p/2	Oy

6.2. Tiếp tuyến (T) của Parabol (P).

a) **Trường hợp biết tiếp điểm $M(x_M;y_M) \in (P)$**

(P): $y^2 = 2px \Rightarrow$ (T): $y_M . y = p(x + x_M)$.

(P): $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \Rightarrow$ (T): $(y_M - y_0)(y - y_0) = p(x - x_0 + x_M - x_0)$

b) **Điều kiện tiếp xúc**

Cho (T): $Ax + By + C = 0$, (P): $y^2 = 2px$.

(T) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow pB^2 = 2AC$

BÀI TẬP

1. Cho (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ và điểm M(-2,1). Viết phương trình đườngthẳng (d) qua M và cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Đs: $32x - 25y + 89 = 0$.

2. Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$.

(a) Tìm các điểm M trên (E) sao cho khoảng cách từ M đến tiêu điểm trái bằng 2 lần khoảng cách từ M đến tiêu điểm phải.

(b) Viết phương trình tiếp tuyến với (E) biết rằng tiếp tuyến này song song với đường thẳng $x - 2y +1 = 0$.

(c) Viết phương trình tiếp tuyến với (E) biết rằng tiếp tuyến này cách gốc tọa độ một đoạn bằng 2.

Đs: (a) $x - 2y \pm\sqrt{17}$; (b) $\pm\sqrt{\frac{2}{5}}x - y \pm 2\sqrt{\frac{7}{5}} = 0$.

3. Cho (E_1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và (E_2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2).

4. Viết phương trình tiếp tuyến với elip (E): $x^2 + 4y^2 = 20$ biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$.

Đs: $x - y \pm 5 = 0$.

5. Biết rằng có một hình vuông ngoại tiếp (E): $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. Lập phương trình các cạnh hình vuông ngoại tiếp (E) đó.

Đs: $x + y + 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $x - y + 3 = 0$; $x - y - 3 = 0$.

6. Cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E) và (C).

HD: Xét đường thẳng (T): $y = ax + b$. Từ các điều kiện (T) tiếp xúc (E) và (T) tiếp xúc (C) giải tìm được a, b.

7. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và M là điểm bất kỳ thuộc (H). CMR tích số các khoảng cách từ M đến các tiệm cận là không phụ thuộc vào M.

8. Cho (H): $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

(a) Viết phương trình các tiếp tuyến với (H), xuất phát từ A(2,0).

(b) Viết ptrình các tiếp tuyến với (H), song song với (d): 2x - y - 4 = 0.

(c) Tìm điểm M thuộc (H) sao cho tiếp tuyến với (H) tại M vuông góc với đường thẳng x + 3y - 4 = 0.

Đs: a. $3(x-2) \pm \sqrt{21}\,y = 0$. b. $2x - y \pm \sqrt{91} = 0$.

c. $(\frac{25}{2\sqrt{6}},\frac{3}{2\sqrt{6}})$; $M_2(-\frac{25}{2\sqrt{6}},-\frac{3}{2\sqrt{6}})$.

9. Cho (C_m): $(m^2-9)x^2 + 16y^2 = 16(m^2-9)$.

(a) Biện luận theo m bản chất (tên) của (C_m).

(b) Xác định tiêu điểm, đỉnh và các tiệm cận (nếu có) của (C_m).

Đs: (a) m= ±3: (C_m) là trục Ox; m= ±5: đường tròn;

-3< m <3: hypebol; m còn lại: elip.

10. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với (t) là tiếp tuyến bất kỳ tại tiếp điểm T $\in$(H). Tiếp tuyến (t) cắt các tiệm cận của (H) tại M, N.

(a) Chứng minh rằng T là trung điểm của đoạn MN.

(b) Chứng tỏ diện tích tam giác OMN, O là gốc tọa độ, không phụ thuộc vào vị trí của tiếp điểm T trên (H).

11. Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và (t) là một tiếp tuyến của (H). CMR tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm tới (t) không phụ thuộc vào vị trí của (t).

12. Viết phương trình tiếp tuyến của (H): $4x^2 - 9y^2 = 36$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x + 2y = 0.

Đs: $y = 2x \pm 4\sqrt{2}$.

13. Cho (H): $4x^2 - y^2 = 4$. Viết phương trình đường thẳng (d), cắt (H) tại hai điểm A, B sao cho M(2,2) là trung điểm của đoạn AB.

Đs: $4x - y - 6 = 0$.

14. Cho (P): $y^2 = 6x$ và (d): $4x + 3y + 46 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa (P) và (d).

Đs: 241/40.

15. Cho (P): $y^2 = 2px$ với tiêu điểm F và đường chuẩn (d). Xét điểm $M \in (P)$, hạ MN vuông góc với (d). Chứng minh rằng tiếp tuyến với (P) tại M là phân giác của góc $\widehat{FMN}$.

16. Cho F(3,0) và đường thẳng (d): $3x - 4y + 16 = 0$.

(a) Viết phương trình đường tròn tâm F và tiếp xúc với (d).

(b) Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F, đỉnh là gốc tọa độ O. Chứng minh rằng (P) tiếp xúc (d) tại 1 điểm, tìm điểm đó.

Đs: (a) $(x - 3)^2 + y^2 = 25$. (b) $y^2 = 12x$; M(16/3, 8).

17. Viết phương trình của (P) đi qua giao điểm của đường thẳng $x + y=0$ với đường tròn $x^2 + y^2 + 4y = 0$, biết rằng parabol có đỉnh là gốc tọa độ.

Đs: (P): $x^2= -2y$.

18. Viết phương trình tiếp tuyến với (P): $y^2 = 8x$ xuất phát từ điểm M(0, -2).

Đs: $x = 0$; $x + y + 2 = 0$.

19. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1,\ y^2 = 12x.$$

20. Cho parabol (P): $y^2 = x$. Gọi F là tiêu điểm của (P), giả sử đường thẳng (D) qua F và cắt (P) tại hai điểm M,N.

(a) Tính MN khi (D) song song Oy

(b) Giả sử MN không song song Oy .Gọi k là hệ số góc của (D) Tính MN theo k . Xác định các điểm M, N sao cho MN ngắn nhất .

§ 7. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

7.1. Các hệ thức véctơ cơ bản

- (Quy tắc ba điểm) Với ba điểm A, B, C tùy ý, ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ hay } \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

- (Quy tắc hình bình hành) Với mọi hình bình hành ABCD, ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \text{ hay } \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$$

- (Quy tắc hình hộp) Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$$

- Nếu I là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}, \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}, \forall M$$

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}, \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}, \forall M$$

- Nếu G là trọng tâm của tứ diện ABC thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}, \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}, \forall M$$

7.2. Tích có hướng

- Cho hai véctơ $\vec{a}$ = $(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}$ = $(b_1;b_2,b_3)$. Véctơ tích có hướng có tọa độ

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

- Nếu $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ thì $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ và $|\vec{c}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

7.3. Ứng dụng tích có hướng tính khoảng cách, diện tích, thể tích

- Diện tích hình bình hành ABCD: S = $\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích hình hộp tạo bởi 3 véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$:

$$V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$$

- Thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
- Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:

$$d(a;b)=\frac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|} \quad (\vec{a}\,//\,a,\vec{b}\,//\,b,A\in a,B\in b)$$

- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng b:

$$d(A;b) = \frac{\left|\left[\vec{b},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{b}\right|} \quad (B\in b,\vec{b}\,//\,b)$$

7.4. Ba véctơ đồng phẳng

- Ba véctơ khác véctơ không được gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c} = 0$
- Nếu trong 3 véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có 2 véctơ cùng phương thì chúng đồng phẳng.
- Nếu một trong ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bằng $\vec{0}$ thì chúng đồng phẳng.
- Trong ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì một véctơ tùy ý có thể phân tích qua hai véctơ còn lại

  $\vec{a} = p.\vec{b} + q.\vec{c}$ (với p và q là các số thực)
- Mọi véctơ $\overrightarrow{m}$ trong không gian đều có thể phân tích theo ba véctơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

  $\overrightarrow{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ (với p, q và r là các số thực)
- A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
- A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

§ 8. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

8.1. Phương trình

1) **Phương trình tổng quát**

Mp có pháp véctơ $\vec{n}$ = (A;B;C) có phương trình Ax + By + Cz + D = 0

Chú ý: Xét mp (α) qua điểm $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ nhận các véctơ $\vec{a}$= $(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\vec{b}$ = $(b_1;b_2;b_3)$ làm cặp véctơ chỉ phương. Khi đó (α) có pháp véctơ:

$$\vec{n} = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

2) **Phương trình mp qua $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ và có pháp véctơ $\vec{n}$ = (A; B; C)**

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3) Mặt phẳng đoạn chắn

Mặt phẳng qua 3 điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

4) **Chùm mặt phẳng**

Mặt phẳng (α) qua giao tuyến của 2 mặt phẳng

(α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Có phương trình:

a) Dạng 2 tham số

$$\mathbf{m}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mathbf{n}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

b) Dạng 1 tham số (Điều kiện (α)$\neq$(α_2))

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \mathbf{q}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

5) Các mặt phẳng đặc biệt

Stt	**trường hợp**	**phương trình**
1	Song song Oxy	z + D = 0
2	Song song Oxz	y + D = 0
3	Song song Oyz	x + D = 0
4	Chứa Ox	By + Cz = 0
5	Chứa Oy	Ax + Cz = 0
6	Chứa Oz	Ax + By = 0
7	Song song Ox	By + Cz + D = 0
8	Song song Oy	Ax + Cz + D = 0
9	Song song Oz	Ax + By + D = 0

8.2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng

(α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1) Biện luận

- Hai mặt phẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- Hai mặt phẳng song song $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

- Hai mặt phẳng cắt nhau $\Leftrightarrow (A_1:B_1:C_1) \neq (A_2:B_2:C_2)$

Chú ý: Hai mặt phẳng vuông góc nhau khi $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2) Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song

(α_1): $Ax + By + Cz + D_1 = 0$

(α_2): $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$$d(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3) Góc nhọn giữa 2 mặt phẳng xác định bởi

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

§ 9. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

9.3. Phương trình đường thẳng

Cho (d) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véctơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

1. **Phương trình tham số** (d): $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$.

2. **Phương trình chính tắc** (d): $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

3. **Phương trình tổng quát** (d): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

   Khi đó, (d) có véctơ chỉ phương: $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$.

4. **Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A, B**

$$\frac{x - x_A}{y_B - y_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

9.4. Sự tương giao giữa hai đường thẳng

Xét đường thẳng (a) qua A, có vtcp $\vec{a}$ và đường thẳng (b) qua B, có vtcp $\vec{b}$.

1. **Biện luận**

stt	Sự tương giao	Điều kiện

1	(a)$\perp$(b)	$\vec{a}\,.\,\vec{b}=0$
2	(a), (b) cùng phương	$\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\left(\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\right)$
3	(a) // (b)	• $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương • (a), (b) không có điểm chung
4	(a) cắt (b)	• $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương • $[\vec{a},\vec{b}].\overline{AB}=0$
5	(a), (b) đồng phẳng	$[\vec{a},\vec{b}].\overline{AB}=0$
6	(a), (b) chéo nhau	$[\vec{a},\vec{b}].\overline{AB}\neq 0$

2. Góc nhọn φ tạo bởi 2 đường thẳng (a) và (b) được xác định bởi

$$\cos\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{b})|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

9.5. Sự tương giao giữa đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng (d) có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (P) có pháp véctơ $\vec{n}=(A;B;C)$.

1. **Biện luận**

Cách 1

- Nếu $\vec{a}.\vec{n}\neq 0$ thì (d) cắt (P).
- Nếu $\vec{a}.\vec{n}=0$ thì (d) cùng phương (P) (đồng thời nếu có một điểm thuộc (d) mà không thuộc (P) thì (d) song song (P)).

Cách 2

Lập hệ phương trình xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

- Nếu hệ vô nghiệm thì (d) song song (P).
- Nếu hệ có vô số nghiệm thì (d) nằm trong (P).
- Nếu hệ có duy nhất nghiệm thì (d) cắt (P).

2. **(d) vuông góc (P)** khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương nhau.

3. **Góc φ tạo bởi (d) và (P) xác định bởi**

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|}=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

§ 10. MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

10.1. Phương trình mặt cầu

Mặt cầu (S) có tâm I(a;b;c), bán kính R có phương trình

- Dạng **chính tắc** của (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$
- Dạng **khai triển** của (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

  Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Bán kính: $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

10.2. Mặt tiếp diện

a) Mặt tiếp diện tại $M(x_0; y_0; z_0)$ có phương trình:

$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2$

hay $xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x+x_0) - b(y+y_0) - c(z+z_0) + d = 0$

b) Điều kiện để mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng (α): $d(I, \alpha) = R$

10.3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α).

- Nếu $d(I, \alpha) > R$ thì (α) và (S) không giao nhau.
- Nếu $d(I, \alpha) = R$ thì (α) và (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (α) được gọi là tiếp diện của I.
- Nếu $d(I, \alpha) < R$ thì (α) và (S) cắt nhau theo 1 đường tròn nằm trên (α).

10.4.Đường tròn trong không gian

Gọi C(J,r) là đường tròn xác định bởi mặt cầu S(I,R) và mp (α).

- Tâm của (C) được xác định bởi hình chiếu vuông góc của I lên (α):

  $\Rightarrow J = (d) \times (\alpha)$

  với (d) là đường thẳng qua I và vuông góc (α)

- Bán kính r của (C) được xác định bởi:

  $r^2 = R^2 - [d(I, \alpha)]^2$

BÀI TẬP

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A(2, 3, -1) và chứa trục Ox.

   Đs: $y + 3z = 0$.

2. Viết phương trình mặt phẳng (β) qua B(2, 4, -3) và chứa trục Oy.

   Đs: $3x + 2z = 0$.

3. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A(-1,-1,2), vuông góc với các mặt phẳng sau: x - 2y + z + 4 = 0 và x + 2y - 2z + 4 = 0.

Đs: 2x + 3y + 4z - 3 = 0.

4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A(2, 3, -1), B(-2, 1, 1) và vuông góc với mặt phẳng x - 2y + z + 3 = 0.

5. Tìm điểm chung của 3 mặt phẳng : 2x - y + 3z - 9 = 0; x + 2y + 2z - 3 = 0 và 3x + y -4z + 6 = 0.

Đs: (1,-1,2).

6. Viết phương trình mặt phẳng chứa Ox và tạo với mặt phẳng (α): x - y = 0 một góc bằng 60^0.

Đs: y $\pm$ z = 0.

7. Cho điểm A(2,0,3) và mặt phẳng (P): 2x - 3y + 5z - 4 = 0.

(a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P).

(b) Tìm hình chiếu vuông góc của A lên mp(P).

(ĐS:A'(23/19, 45/38, 39/38)

8. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d): $\begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \end{cases}$

và vuông góc với mặt phẳng (P): x - 2y + z + 5 = 0.

Đs: 11x -2y - 15z - 3 = 0.

9. Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB với O là gốc tọa độ, A(3,-2,6) và B(-2,4,4).

Đs: OH = $\dfrac{8\sqrt{26}}{\sqrt{65}}$.

10. Cho điểm A(-4,2,0) và 2 đường thẳng :

$(d)\begin{cases} x=12+12t \\ y=36+30t \\ z=0 \end{cases} \qquad (d')\begin{cases} x=12+20t \\ y=24+30t \\ z=0 \end{cases}$

(a) CMR: (d) ; (d') và A cùng thuộc cùng một mặt phẳng.

(b) Viết phương trình các cạnh của tam giác có một đỉnh là A và 2 trung tuyến có phương trình là phương trình của (d) và (d'). (ĐS: B(-2,1,0); C(6,15,0))

11. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x+mz-m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}$, với m $\neq 0$.

(a) Chứng minh rằng (d) luôn luôn đi qua 1 điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng (d) luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

HD: (a): Điểm cố định (0,0,1). (b) Khử m từ pt của (d) có :

(α): x + y + z - 1=0.vì m khác 0 và hai điểm phân biệt (0,0,1), (m,1-m,0) đồng thời thuộc (d) và (α):

12. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x+4mz-3m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}$, với m $\neq$ 0.

Chứng minh rằng (d) luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định (P).

13. Cho đường thẳng (d): $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{1}$, viết phương trình đường thẳng (D) đi qua A(3,2,1) sao cho (D) cắt (d), đồng thời (D) vuông góc với (d).

Đs: $\begin{cases} 2x+4y+z-15=0 \\ 14x-5y-8z-24=0 \end{cases}$.

14. Cho hai đường thẳng (d_1): $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ x-3z+2=0 \end{cases}$; (d_2): $\begin{cases} 2x-3y+9=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$

CMR: (d_1) // (d_2),viết phương trình mặt phẳng chứa 2 đường thẳng đó.

15. Cho các đường thẳng (d_1): $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và (d_2): $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

(a) CMR: (d_1) và (d_2) chéo nhau.

(b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song (d_2).

(c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1) và(d_2).

(e) Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

ĐS: e) $\begin{cases} x=3-4t \\ y=1-2t \\ z=1-8t \end{cases}$

16. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A(1,2,3), B(-2,1,1) và vuông góc với (β): x - 2y + z + 3 = 0.

Đs: 5x - y -7z + 18 = 0.

17. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng:

(d): $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$ trên mặt phẳng (P): x + 2y + 3z + 4 = 0.

18. Cho mặt phẳng (P): x + y + z - 1 = 0 và 2 đường thẳng (d_1) : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$, ($d_2$): x = 2y = z - 4. Lập phương trình đường thẳng (d) vuông góc (P) và cắt cả 2 đường thẳng (d_1) và (d_2).

19. Cho A(1,2,-1); B(7,-2,3) và đường thẳng (d): $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-2}$.

(a) CMR (d) và đường thẳng AB cùng nằm trong một mặt phẳng.

(b) Tìm điểm M $\in$ (d) sao cho tổng MA + MB là nhỏ nhất.

Đs: M(2,0,4).

20. Cho 2 điểm A(-1,3,-2), B(-9,4,9) và mặt phẳng (P): 2x + z + 1 = 0. Tìm điểm K trên mặt phẳng (P) sao cho AK + BK nhỏ nhất.(ĐS: K(-27/55,35/11,54/55)

21. Cho các đường thẳng (d): $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$ và (d') $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{3}$.

CMR (d) và (d') cùng thuộc một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

22. Cho 2 đường thẳng (d): $\begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ và (d'): $\begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

Lập phương trình đường thẳng (Δ) song song Oz và cắt cả (d) và (d').

23. Cho A(0,1,1) và đường thẳng (d) : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$, (d') : $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$

Lập phương trình đường thẳng (a) qua A vuông góc (d) và cắt (d').

24. Cho mặt phẳng (P): 2x + y + z - 1 = 0 và đường thẳng (d): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$.

Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua giao điểm của (P) với (d) vuông góc (d) và nằm trong (P).

25. Cho ba điểm A(1;1;2), B(-2;1;-1), C(2;-2;-1) . Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC).

26. Cho 2 đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$ $(D): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Xác định a để tồn tại mặt phẳng (Q) qua (Δ) và vuông góc (D).

27. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 30 = 0$.

(a) Tìm tâm và bán kính của (S).

(b) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với hai đường thẳng sau (d): $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+13}{2}$ và (D): $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-8}{0}$.

28. Cho mặt phẳng (P): 2x - y + z + 3 = 0 và (Q): 2x - y + z - 1 = 0.

(a) Viết phương trình mặt phẳng (α) song song và cách đều (P), (Q).

(b) Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P), (Q) và có tâm thuộc đường thẳng (D): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

Đs: (a) (α): 2x - y + z + 1 = 0. (b) $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2/3$.

29. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 1 = 0$.

(a) Chứng minh rằng (P) cắt (S) theo một đường tròn.

(b) Tìm tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến trên.

Đs: I (1/3, 1/3, 1/3); R=$\sqrt{\frac{11}{3}}$.

30. Cho A(1,0,0), B(0,1,1) và C(-1,0,2)

(a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

(b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đs: (a) x+z-1=0; (b) $\begin{cases} x+z-1=0 \\ (x-1)^2+(y-3/2)^2+z^2=\frac{9}{4} \end{cases}$.

31. Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ và tiếp xúc 2 mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$, (Q): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

32. Viết phương trình mặt cầu nội tiếp trong tứ diện có 4 mặt nằm trên các mặt phẳng có phương trình: $3x - 2y + 6z - 18 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

33. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho MA = 2MB với A(-4,0,0) và B(2,0,0). Đs: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$.

34. Viết phương trình mặt cầu chứa đường tròn có phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z-a=0 \end{cases}$ và đi qua A(a, a, a). Đs: $x^2 + y^2 + z^2 - a(x + y + z) = 0$.

35. Tìm tâm và bán kính của đường tròn: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-10y=0 \\ x+2y+2z-19=0 \end{cases}$.

Đs: I (1,7,2); R = 4.

36. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) lần lượt có phương trình:

(P) : 2x □ 3y + 4z □ 5 = 0; (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y$ □ $5z + 6 = 0$

(a) Tìm tâm I và bán R kính mặt cầu.

(b) Tính khoảng cách từ I đến mp(P) .Từ đó suy ra mp(P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tìm tâm và bán kính của (C).

37. Lập phương trình mặt cầu có tâm I (2,3,-1) và cắt đường thẳng

$(d):\begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ tại 2 điểm A, B sao cho AB = 16.

Đs: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

38. Cho 2 điểm A(0,0,-3), B(2,0,-1) và mp (P):3x - 8y + 7z - 1 = 0. Tìm điểm C trên mp (P) sao cho ΔABC đều.

39. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1.Trên BB', CD, A'D' lần lượt lấy M, N, P sao cho B'M = CN = D'P = a (0 < a < 1). CMR:

(a) $\overrightarrow{MN} = a.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$

(b) AC ⊥ mp(MNP)

40. Cho 4 điểm S(3,1,-2) , A(5,3,-1) , B(2,3,-4) , C(1,2,0).

(a) CMR hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều và 3 mặt bên là các tam giác vuông cân.

(b) Tính toạ độ điểm D đối xứng với điểm C qua AB.

(c) Điểm M thuộc mặt cầu tâm D bán kính R=$\sqrt{18}$ (M∉mp(ABC)).Nếu một tam giác có độ dài các cạnh lần lượt bằng các đoạn MA, MB, MC thì tam giác đó có đặc điểm gì ?

41. Cho 2 đường thẳng $(d_1): \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$, $(d_2): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

(a) CMR (d_1) và (d_2) chéo nhau.

(b) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (d_1), (d_2).

42. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = t' \\ y = 1-t' \\ z = t' \end{cases}$.

(a) Cmr (d_1) và (d_2) chéo nhau.

(b) Viết phương trình mp(P), (Q) song song với nhau lần lượt qua (d_1), (d_2).

43. Cho hai đường thẳng $(d_1): \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{2}$, $(d_2): \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

(a) Cmr (d_1) và (d_2) chéo nhau.

(b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

44. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 5+2t \\ y = 1-t \\ z = 5-t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 3+2t' \\ y = -3-t' \\ z = 1-t' \end{cases}$. Chứng tỏ rằng ($d_1$) và ($d_2$) song song nhau. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

45. Cho điểm M(1,2,-1) và đường thẳng $(d): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Tìm điểm N đối xứng với M qua (d). Tính độ dài MN.

46. Cho A(1,2,-1), B(7,-2,3) và đường thẳng $(d):\begin{cases}2x+3y-4=0\\y+z-4=0\end{cases}$.

(a) Chứng minh rằng (d) và AB đồng phẳng.

(b) Tìm điểm C trên (d) sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

47. Cho A(-1, 3, 2), B(4,0,3), C(5,-1,4), D(0,6,1).

(a) Viết phương trình tham số của đường thẳng BC. Tìm tọa độ chân đường cao AH của tam giác ABC.

(b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD). Tính d(A, BCD).

48. Trong không gian cho mặt cầu (C): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$, đường thẳng $(d):\begin{cases}3x-2y+z-8=0\\2x-y+3=0\end{cases}$ và mặt phẳng (P): 5x + 2y +2z -7 = 0.

(a) Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc (C).

(b) Viết phương trình hình chiếu của (d) lên (Q).

49. Cho đường tròn $(C):\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z+17=0\\x-2y+2z+1=0\end{cases}$.

(a) Tìm tâm của (C).

(b) Viết ptrình mặt cầu chứa (C) và có tâm thuộc mp(P): x + y + z + 3 = 0.

50. Cho A(1,1,1), B(1,2,1), C(1,1,2), D(2,2,1).

(a) Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và CD.

(b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

(c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

51. Cho A(1,1,1) và $(d):\begin{cases}x-2y+z-9=0\\2y+z+5=0\end{cases}$.

(a) Tìm hình chiếu vuông góc của A lên (d).

(b) Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (d) tại M, N sao cho MN = 16.

52. Cho tam giác ABC có C(3,2,3), đường cao $(AH):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ và đường phân giác trong của góc $\hat{B}$ là $(BM):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

53. Cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $(d_2):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

(a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

(b) Tìm tọa độ điểm A đối xứng với B(3,-3,2) qua (d_1).

54. Cho đường thẳng $(d):\begin{cases} x-z+1=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$ và hai mặt phẳng (P): 2x + y - z - 5 = 0, (Q): x - y + 2z + 8 = 0.

(a) Tìm giao điểm A của (d) và (P). Viết phương trình đường thẳng (d_1) qua A vuông góc với (d) nằm trong (P).

(b) Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm nằm trên (d) và tiếp xúc (P), (Q).

CHUYÊN ĐỀ 2

GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

✍ **Phương pháp:**

✎ **Bước 1:** Chọn hệ trục toạ độ Oxyz thích hợp (chú ý đến vị trí của gốc O).

✎ **Bước 2:** Xác định toạ độ các điểm có liên quan.

(có thể xác định toạ độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)

Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào :

• Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).

• Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song ,cùng phương , thẳng hàng, điểm chia đọan thẳng để tìm tọa độ

• Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.

• Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.

✎ **Bước 3:** Sử dụng các kiến thức về toạ độ để giải quyết bài toán

Các dạng toán thường gặp:

• Độ dài đọan thẳng
• Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng
• Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng
• Khoảng cách giữa hai đường thẳng
• Góc giữa hai đường thẳng
• Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
• Góc giữa hai mặt phẳng
• Thể tích khối đa diện
• Diện tích thiết diện
• Chứng minh các quan hệ song song , vuông góc
• Bài toán cực trị, quỹ tích

Bổ sung kiến thức :

1) Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt phẳng chiếu:

$$S' = S.\cos\varphi.$$

2) Cho khối chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S, Ta luôn có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}$$

Ta thường gặp các dạng sau:

1. Hình chóp tam giác

a. Dạng tam diện vuông

Ví dụ 1.

Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).

d[M, (OAB)] = 3 ⇒ $z_M = 3$.

Tương tự ⇒ M(1; 2; 3). Ta có:

$$mp(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\ (1).$$

$Mat\ khac:$

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}abc\ (2).$$

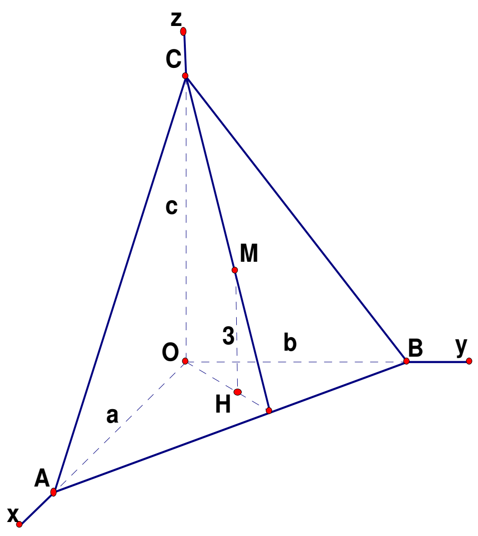
$Ap\ dung\ BDT\ Cosi\ cho\ (1):$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}abc \ge 27$$

$$(2) \Rightarrow \min V_{O.ABC} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow a=3, b=6, c=9\ (ycbt).$$



Ví dụ 2:

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, AD = a, AC = b, AB = c.

1. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c.
2. CMR : $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$.

(Dự bị 2 – Đại học khối D – 2003)

Lời Giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm là :A(0;0;0), B(c;0;0), C(0;b;0), D(0;0;a). Ta có:

$* \ \overrightarrow{BC} = (-c, b, 0), \overrightarrow{BD} = (-c, 0, a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (ab, ac, bc)$

$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$

$* \ CM: 2S = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

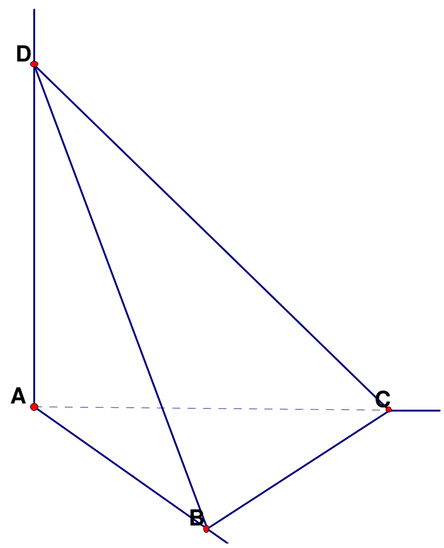
$Theo\ BDT\ Cosi:$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c \ \ (1)$

$b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2abc^2 \ \ (2)$

$a^2c^2 + a^2b^2 \geq 2a^2bc \ \ (3)$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c) \ \ (dpcm).$



b. Dạng khác

Ví dụ 3 (trích đề thi Đại học khối A – 2002).

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích Δ AMN, biết (AMN) ⊥ (SBC).

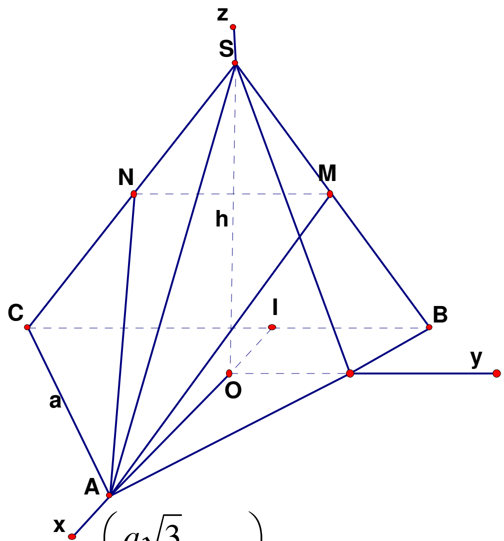
Lời Giải

Gọi O là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC), ta suy ra O là trọng tâm tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow AO = \frac{1}{3}AI = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA.

Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:



$$O(0,0,0), S(0,0,h), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3},0,0\right)$$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6},0,0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3},\frac{a}{2},0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6},-\frac{a}{2},0\right)$$

$$M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12},\frac{a}{4},\frac{h}{2}\right) \text{ và } N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12},-\frac{a}{4},\frac{h}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{AMN} = \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4},0,\frac{5\sqrt{3}a^2}{24}\right)$$

$$\vec{n}_{SBC} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah,0,\frac{\sqrt{3}a^2}{6}\right).$$

$$Do\,(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{AMN}.\vec{n}_{SBC} = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{\sqrt{10}a^2}{16}(dvdt).$$

2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

b) Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao SO vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử SO = h, OA = a, OB = b ta có O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(–a; 0; 0), D(0;–b; 0), S(0; 0; h).

c) Hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật ABCD và AB = b. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, trong (ABCD) ta vẽ tia Hy vuông góc với AD. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz ta có:

$$H(0,0,0), A\left(\frac{a}{2},0,0\right), B\left(\frac{a}{2},b,0\right), C\left(-\frac{a}{2},b,0\right), D\left(-\frac{a}{2},0,0\right), S\left(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. Hình lăng trụ đứng

Tùy theo hình dạng của đa giác đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên. Chú ý rằng ta có hai lăng trụ đứng đặc biệt là hình hộp chữ nhật và hình lập phương, ngoài ra ta thường gặp các bài toán về lăng trụ đứng có đáy là tam giác.

Ví dụ 4:

Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. CMR: AC’ vuông góc mp(A’BD).

Lời Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O ≡ A, B ∈ Ox, D ∈ Oy, và A’ ∈ Oz.

Giả sử hình lập phương có cạnh là a. Suy ra:

A(0,0,0), B(a,0,0), D(0,a,0), A’(0,0,a), C’(a,a,a).

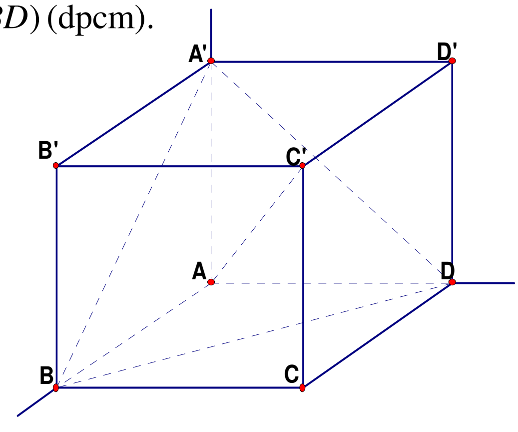
Ta có phương trình đoạn chắn của mp(A’BD):

x + y + z = a hay x + y + z – a = 0.

Suy ra: $\vec{n} = (1,1,1)$ mà $\overrightarrow{AC'} = (a,a,a) = a(1,1,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \parallel \vec{n}$

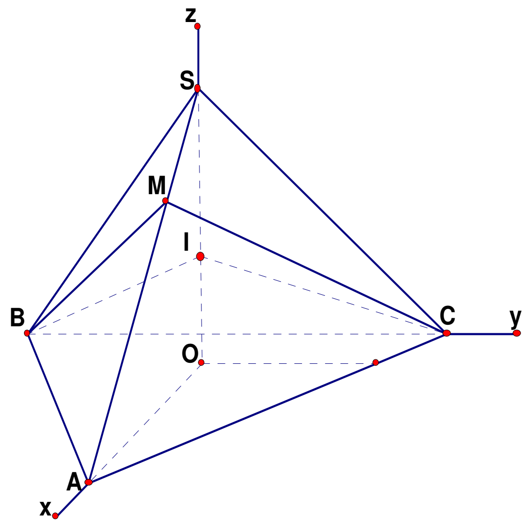
Vậy $\overrightarrow{AC'} \perp mp(A'BD)$ (dpcm).



Ví dụ 5:

Cho hình chóp SABC, các cạnh đều có độ dài bằng 1, O là tâm của ΔABC. I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.

Lời giải:



Chọn hệ trục Oxyz sao cho O là gốc tọa độ, A ∈ Ox, S ∈ Oz, BC // Oy

Tọa độ các điểm:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right),B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},0\right),C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0\right),S\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right),I\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(0,1,0),\overrightarrow{IC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\Rightarrow \vec{n}_{(IBC)}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right]=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

□ Phương trình mặt phẳng (IBC) là: $-\sqrt{2}x+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0$

Mặt khác: $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{SA}\, song\ song\ \vec{a}=\left(1,0,-\sqrt{2}\right).$

□ Phương trình đường thẳng SA: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t \\ y=0 \\ z=-\sqrt{2}t \end{cases}$

Tọa độ điểm M = (IBC) ∩ SA là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t \\ y=0 \\ z=-\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}x+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{3}}{12},0,\frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

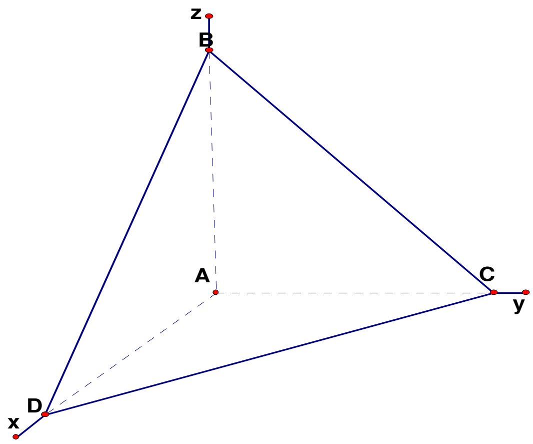
Nhận xét: $\overrightarrow{SM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{12},0,-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$

$\Rightarrow$ M nằm trên đoạn SA và: $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{V_{SBCM}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{4}$.(xem mục 2 trang 39)

Ví dụ 6:

Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Cho AB = 3, AC = AD = 4. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).

Lời Giải



Chọn hệ trục Oxyz sao cho A ≡ O, D $\in$ Ox; C $\in$ Oy và B $\in$ Oz.

$\Rightarrow$ Tọa độ A(0;0;0); B(0;0;3); C(0;4;0); D(4;0;0)

Phương trình đoạn chắn của mp(BCD) là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$

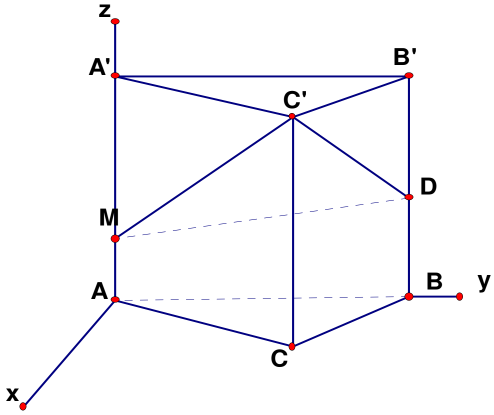
$\Leftrightarrow$ mp(BCD): 4x + 3y + 3z – 12 = 0

Khoảng cách cần tìm là: $d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{\left|-12\right|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$.

Ví dụ 7:

Cho hình lăng trụ ABCD.$A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. AA_1 = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1 . M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔMC_1D.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O, B ∈ Oy, A_1 ∈ Oz. Khi đó:

$$A(0,0,0),\ B(0,a,0),\ A_1(0,0,2a), C\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},2a\right), D(0,a,a).$$

Do M di động trên AA_1 nên tọa độ M có dạng là: M(0, 0, t) với t ∈ [0, 2a].

Ta có: $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right]\right|$, trong đó:

$$\overrightarrow{DC_1} = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{a}{2},a\right), \overrightarrow{DM} = (0,-a,t-a)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right] = -\frac{a}{2}\left(t-3a,\sqrt{3}(t-a),\sqrt{3}a\right)$$

$$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right]\right| = \frac{a}{2}\sqrt{(t-3a)^2+3(t-a)^2+3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4t^2-12at+15a^2}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{4t^2-12at+15a^2}.$$

Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của $S_{\Delta DC_1M}$ tùy thuộc vào giá trị hàm số.

Xét hàm: $f(t) = 4t^2-12at+15a^2, \quad TXD: t\in[0,2a]$

$$f'(t) = 8t-12a$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3a}{2}$$

Lập bảng biến thiên tìm được Max của $S_{\Delta DC_1M} = \frac{\sqrt{15}.a^2}{4}$ khi t = 0 hay M ≡ A.

Khái quát phương pháp giải toán:

Để giải một bài toán hình học không gian bằng phương pháp sử dụng tọa độ đề các trong không gian ta làm như sau:

- **Bước 1:** Thiết lập hệ tọa độ thích hợp, từ đó suy ra tọa độ các điểm cần thiết.
- **Bước 2:** Chuyển hẳn bài toán sang HH giải tích trong không gian. Bằng cách:

+ Thiết lập biểu thức cho giá trị cần xác định.

+ Thiết lập biểu thức cho điều kiện để suy ra kết quả cần chứng minh.

+ Thiết lập biểu thức cho đối tượng cần tìm cực trị.

+ Thiết lập biểu thức cho đối tượng cần tìm quỹ tích.v.v…

Chú ý:

▪ Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.

▪ Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng đáy.

▪ Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết là hình chữ nhật.

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC

Bài 1 (Đại học khối D – 2002). Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc (ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD).

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AD và AB = 2, AC = 4. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 6. Gọi E, F là trung điểm của SB, SC và H là hình chiếu của A trên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACE).
3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

Bài 3. Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA = OB = OC = 3cm và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên (ABC) và các điểm A’, B’, C’ lần lượt là hình chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB).

1. Tính thể tích tứ diện HA’B’C’.
2. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Chứng tỏ S.ABC là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA. Gọi H là hình chiếu của đỉnh O trên (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm của ΔABC.
2. Chứng minh cos2 α + cos2 β + cos2 γ = 1.

Bài 5. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

1. Tính góc φ giữa (OMN) và (OAB).
2. Tìm điều kiện a, b, c để hình chiếu của O trên (ABC) là trọng tâm ΔANP.
3. CMR góc phẳng nhị diện [N, OM, P] vuông khi và chỉ khi: $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết AB = 2, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60°.

1. Tính độ dài SA.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SB, C].

Bài 7. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một.

1. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8 (trích đề thi Đại học khối D – 2003). Cho hai mphẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng (d). Trên (d) lấy 2 điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với (d) và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC.

1. Tính diện tích ΔMAB theo a.
2. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SC, B].

Bài 10. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = SA = 6. Cạnh SA vuông góc với đáy. Vẽ AH vuông góc với SB tại H, AK vuông góc với SC tại K.

1. Chứng minh HK vuông góc với CS.
2. Gọi I là giao điểm của HK và BC. Chứng minh B là trung điểm của CI.
3. Tính sin của góc giữa SB và (AHK).
4. Xác định tâm J và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại C, AC = 2, BC = 4. Cạnh bên SA = 5 và vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB.

1. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC và SD.
2. Tính khoảng cách giữa BC và SD.
3. Tính cosin góc phẳng nhị diện [B, SD, C].

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a, đcao SH = h. Mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với SC.

1. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K.
2. Tính diện tích ΔABK.
3. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD.

1. Tính diện tích Δ SBE.

2. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE).

3. (SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $3\sqrt{2}$ cm. Mp(α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

1. Chứng minh AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD.
2. Chứng minh BD song song với (α) .
3. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC.
4. Tính thể tích hình khối ABCDKMH.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD.

1. Tính khoảng cách từ A đến (BCN).
2. Tính khoảng cách giữa SB và CN.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).
4. Tìm điều kiện của a và b để cosin của góc $\angle CMN$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. ΔSAD đều và vuông góc với (ABCD). Gọi H làtrung điểm của AD.

1. Tính d(D, (SBC)), d(HC, SD).
2. Mp(α) qua H và vuông góc với SC tại I. Cmr mp(α) cắt các cạnh SB, SD.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và SO = 2a$\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D' .

1. Chứng minh ΔB'C'D' đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt MD = m ($0 \le m \le a$). Tìm vị trí điểm M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỘP – LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 21. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của A’D’, BB’, CD, BC.

1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.

2. Tính khoảng cách giữa IK và AD.

3. Tính diện tích tứ giác IKNM.

Bài 22 (Đại học khối A – 2003). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc phẳng nhị diện [B, A'C, D].

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho (BD'M) cắt hình lập phương theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

1. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D').

2. Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A').

3. Trên cạnh AD',DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa:

AM=DN=k $(0< k <a\sqrt{2})$.

a. Chứng minh MN song song (A'D'BC).

b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 25. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = 2, AD = 4, AA' = 6. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}$ $(0 \le m \le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, C'D'.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến (A'BD).

2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.

3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.

4. Tính m để diện tích tứ giác MINK lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 26. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh là 2cm. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm hình vuông ADD'A'.

1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) qua C, D', M, N.

2. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (CMN) và hình lập phương.

Bài 27 (Đại học khối B – 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'.

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

2. Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuông.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A. Cho AB = a, AC = b, AA' = c. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với B'C.

1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC' tại I (I khác với C và C').

2. Cho (α) cắt CC' tại I.

a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.

b. Tính góc phẳng nhị diện giữa thiết diện và đáy.

Bài tập bổ sung:

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = $a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy.

1) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

2) Tính khoảng cách từ tâm O hình vuông ABCD đến mặt phẳng (SBC).

3) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

Bài 2: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy.Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60°.

1) Tính MN và SO.

2) Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) .

Bài 3: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC = a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH $\perp$ (ABCD) với SH = a.

1) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 4: Cho góc tam diện Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A,B,C.

1) Hãy tính khoảng cách từ O đến mp(ABC) theo OA = a, OB = b, OC = c.

2) Giả sử A cố định còn B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn OA = OB + OC . Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất.

Bài 5: Cho tứ diện OABC (vuông tại O), biết rằng OA,OB,OC lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α ,β ,γ . Chứng minh rằng:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

2) $S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} = S^2_{\Delta ABC}$.

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Gọi M $\in$ BC, N $\in$ DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$.

CMR hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

CMR hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài 8: Trong không gian cho các điểm A, B, C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho OA = a , OB = $a\sqrt{2}$. OC = c (a, c > 0). Gọi D là điểm đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm của đọan BC. (P) là mặt phẳng qua A, M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với AM.

1) Gọi E là giao điểm của (P) với OC , tính độ dài đọan OE.

2) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).

3) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P).

Bài 9: Cho tứ diện SABC có SC = CA = AB = $a\sqrt{2}$, $SC\perp(ABC)$, ΔABC vuông tại A, các điểm M∈ SA và N ∈ BC sao cho AM = CN = t (0 < t < 2a).

1) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị của t để MN ngắn nhất.

2) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi có AC = 4, BD = 2 và tâm O. SO = 1 vuông góc với đáy. Tìm điểm M thuộc đoạn SO cách đều hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

Bài 11: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, CD. Lấy $P\in BB'$ sao cho BP = 3PB'. Tính diện tích thiết diện do (MNP) cắt hình lập phương .

Bài 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

1) Tính theo a khoảng cách giữa AD' và B'C.

2) Gọi M là điểm chia đọan AD theo tỷ số $\frac{AM}{MD}=3$. Hãy tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB'C). Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

Bài 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a.Gọi M, N là trung điểm của BC và DD'.

1) CMR: $AC'\perp(A'BD)$.

2) Tính khoảng cách giữa BD nà MN theo a.

Bài 14: Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc A = 60^0 . B'O vuông góc với đáy ABCD, cho BB' = a.

1) Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

2) Tính khoảng cách từ B, B' đến mặt phẳng (ACD').

Bài 15: Cho hình vuông ABCD cạnh a tâm I . Trên hai tia Ax, By cùng chiều và cùng vuông góc với mp(ABCD) lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x,CN = y.

1) Tính thể tích hình chóp ABCMN.

2) CMR điều kiện cần và đủ để góc MIN = 90^0 là 2xy = a^2.

Bài 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân ABC với cạnh huyền AB = $4\sqrt{2}$,cạnh bên SC ⊥ (ABC) và SC = 2 .Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm AB.

1) Tính góc của hai đường thẳng SM và CN.

2) Tính độ dài đọan vuông góc chung của SM và CN.

Bài 17: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1.

1) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' .Chứng minh rằng A'C ⊥ MN .Tính độ dài đọan MN.

2) Gọi I là tâm của mặt CDD'C' . Tính diện tích ΔMNI .

Bài 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a, biết rằng SA = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài 19: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA;OB;OC đôi một vuông góc . Gọi α , β, γ lần lượt là các góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC), (OCA) và (OAB).Chứng minh rằng : $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Bài 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a . Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

Bài 21: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ΔABC cân với AB = AC = a và góc BAC = 120^0, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

CHUYÊN ĐỀ 3

ĐẠI CƯƠNG VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Đường thẳng và mặt phẳng

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

✍ Phương pháp :

➷ Tìm điểm chung của 2 mặt phẳng.

➷ Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Chú ý : Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đòng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm, nếu có của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng .

Ghi chú : Ta có 2 cách để tìm giao tuyến :

➷ Cách 1: tìm 2 điểm chung.

➷ Cách 2: tìm 1 điểm chung + phương giao tuyến.

Ta thường sử dụng phối hợp 2 cách khi xác định thiết diện của hình chóp .

2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

✍ Phương pháp :

Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta tìm trong (P) một đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của a và (P) .

Chú ý : Nếu c chưa có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng (Q) qua a và lấy c là giao tuyến của (P) và (Q) .

3. Thiết diện

Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) là đa giác giới hạn bởi các giao tuyến của (P) với các mặt hình chóp .

✍ Phương pháp :

Xác định lần lượt các giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp theo các bước sau :

➷ Từ điểm chung có sẵn , xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (Có thể là mặt trung gian)

➷ Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác . Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này .

➷ Tiếp tục như thế cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

II. Đường thẳng song song

1. Chứng minh hai đường thẳng song song

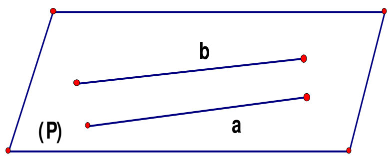
✍ Phương pháp :

Có thể dùng một trong các cách sau :

↳ Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng , rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý đảo của định lý Ta-lét ...)

↳ Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song song với đường thẳng thứ 3 .

↳ Áp dụng định lý về giao tuyến .



2 . Tính góc giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau.

✍ Phương pháp :

↳ Lấy điểm O nào đó .

↳ Qua O dựng a' // a và b' // b.

↳ Góc nhọn hoặc góc vuông tạo bởi a',b' gọi là góc giữa a và b .

* Tính góc : Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lý hàm số côsin trong tam giác thường .

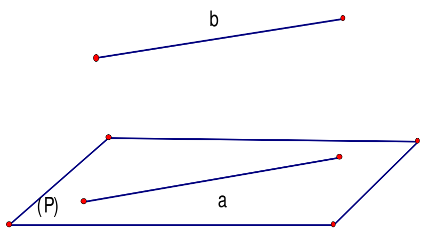
III.Đường thẳng song song với mặt phẳng

1. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng P

✍ Phương pháp :

Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với đường thẳng a chứa trong (P) .

Ghi chú : Nếu a không có sẵn trong hình thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa d và lấy a là giao tuyến của (P) và (Q) .

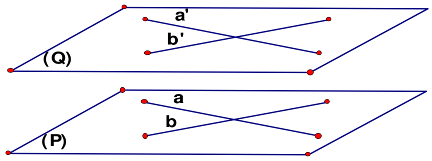


IV.Mặt phẳng song song

Chứng minh hai mặt phẳng song song

✍ Phương pháp :

Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia .



Chú ý :Sử dụng tính chất

$$\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow a//(P)$$

Ta có cách thứ 2 để chứng minh đường thẳng a song song với mphẳng (P) .

V.Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

✍ Phương pháp :

* Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P)

🖎Cách 1: CM a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

🖎 Cách 2: CM a song song với đường thẳng b vuông góc với (P) .

* Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau .

🖎 Chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia .

🖎 Nêú hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp chứng minh vuông góc đã học trong hình học phẳng .

VI.Đường vuông góc và đường xiên

1. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

✍ Phương pháp :

Thực hiện các bước sau :

🖎 Chọn trong (P) một đường thẳng d, rồi dựng mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d (nên chọn d sao cho (Q) dễ dựng).

🖎 Xác định đường thẳng: $c=(P)\cap(Q)$

🖎 Dựng AH vuông góc với c tại H

+ Đường thẳng AH là đường thẳng qua A vuông góc với (P) .

+ Độ dài của đoạn AH là khoảng cách từ A đến (P)

Chú ý :

🖎 Trước khi chọn d và dựng (Q) nên xét xem d và (Q) đã có sẵn trên hình vẽ chưa.

🖎 Nếu đã có sẵn đường thẳng m vuông góc với (P), khi đó chỉ cần dựng Ax // m thì $Ax\perp(P)$.

↳ Nếu AB // (P) thì d(A,(P)) = a(B, (P)).

↳ Nếu AB cắt (P) tại I thì d(A,(P) : d(B, (P)) = IA : IB.

2. Ứng dụng của trục đường tròn

<u>Định nghĩa</u> : Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn đó được gọi là trục đường tròn.

Ta có thể dùng tính chất của trục đường tròn để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng .

↳ Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là một điểm cách đều 3 điểm A,B,C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; khi đó MO vuông góc với mp(ABC) và MO = d(M,(ABC)).

↳ Nếu MA=MB=MC và NA=NB=NC trong đó A,B,C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục đường tròn qua ba điểm A,B,C; khi đó MN vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đương tròn qua ba điểm A,B,C .

3. Góc giữa đương thẳng và mặt phẳng

Cách xác định góc giữa a và (P) .

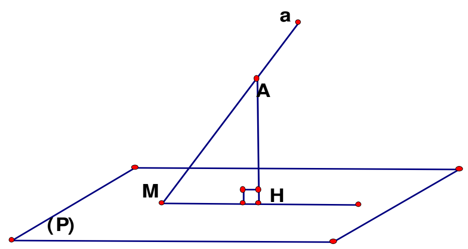
<u>Phương pháp</u> :

↳ Tìm giao điểm M của a với (P)

↳ Chọn điểm A∈a và dựng

$$AH \perp (P),\ \ (H \in (P))$$

khi đó $\widehat{AMH} = \left(\widehat{a,(P)}\right)$.



VII. Mặt phẳng vuông góc

1. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng

Khi giải các bài toán liên quan đến số đo nhị diện hay góc giữa hai mặt phẳng thì ta thường xác định góc phẳng của nhị diện. Nếu góc này chưa có sẵn trên hình ta có thể dựng nó theo phương pháp dưới đây .

<u>Phương pháp</u> :

↳ Tìm cạnh c của nhị diện (giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa hai mặt của nhị diện)

↳ Dựng một đoạn thẳng AB có hai đầu mút ở trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với một mặt của nhị diện .

↳ Chiếu vuông góc A (hay B) trên c thành H .

ta được ∠AHB là góc phẳng của nhị diện .

<u>Chú ý</u> :

↳ Nếu đã có một đường thẳng d cắt hai mặt của nhị diện tại A, B và vuông góc với cạnh c của nhị diện thì ta có thể dựng góc phẳng của nhị diện đó như sau ;

Chiếu vuông góc A (hay B hay một điểm trên AB) trên c thành H . Khi đó $\angle AHB$ là góc phẳng của nhị diện .

↳ Nếu hai đường thẳng a , b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) thì $\angle((P), (Q)) = \angle(a, b)$.

↳ Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân MAB và NAB có chung đáy AB thì $\angle MIN$ (I là trung điểm AB) là góc phẳng của nhị diện đó .

2. Mặt phẳng vuông góc

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .

*** Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc .**

✍ <u>Phương pháp</u> :

↳ Cách 1 : CM mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia .

↳ Cách 2 : chứng minh góc giữa hai mặt phẳng có số đo bằng 90 .

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .**

↳ Cách 1 : Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P) .

↳ Cách 2 : Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P) .

↳ Cách 3 : CM a là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC với A, B, C thuộc (P) .

↳ Cách 4 : Sử dụng định lý : " Nếu a chứa trong một mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) và a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với (P) " .

↳ Cách 5 : Sử dụng định lý : " Nếu a là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với (P) thì a vuông góc với (P) " .

CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ

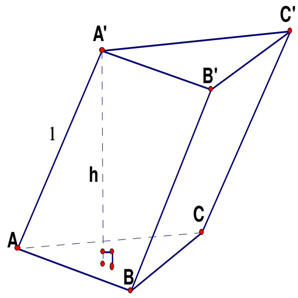
I. Hình đa diện

1. Hình lăng trụ

a/ Diện tích xung quanh

□ $S_{xqlangtru} = 2pl$

□ $S_{xqlangtrudung} = 2ph$



$2p$:chu vi tiết diện thẳng; l:cạnh bên; h:chiều cao.

b/ Thể tích

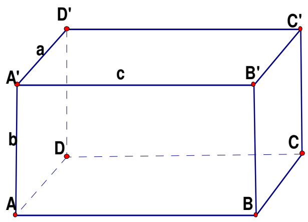
$V_{langtru} = B.h$

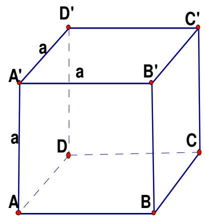
B: diện tích đáy; h: chiều cao.

Đặc biệt:

□ $V_{hopchunhat} = abc$

□ $V_{lapphuong} = a^3$





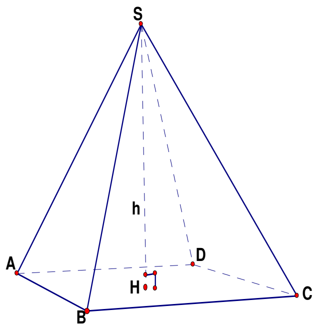
a, b, c: kích thước các cạnh.

2. Hình chóp

a/ Hình chóp

□ $S_{xqchopdeu} = \frac{1}{2}p.d$

□ $V_{chop} = \frac{1}{3}B.h$



p: chu vi đáy; d : trung đoạn; B : diện tích đáy.

b/ Hình chóp cụt

□ $S_{xqchopcutdeu} = \frac{1}{2}\left(p + p'\right).d$

□ $V_{chopcut} = \frac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{B.B'}\right).h$

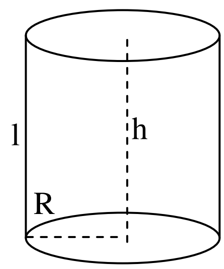
p': chu vi đáy nhỏ; B': diện tích đáy nhỏ.

II. Hình tròn xoay

1. Hình trụ

□ $S_{xq} = 2\pi Rl$

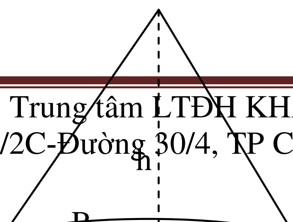
□ $V = \pi R^2 h$



R: bán kính đáy; l: đường sinh; h: chiều cao.

2. Hình nón

a/ Hình nón



□ $S_{xq} = \pi R l$

□ $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

R: bán kính đáy; l: đường sinh; h: đường cao.

b/ Hình nón cụt

□ $S_{xq} = \pi(R+r)l$

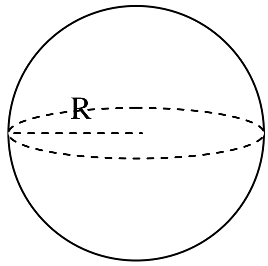
□ $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h$

R ,r: bán kính đáy lớn, nhỏ.

3. Hình cầu

□ $S_{xq} = 4\pi R^2$

□ $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



R : bán kính mặt cầu.

<u>Vấn đề: Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng</u>

<u>Phương pháp</u>:

*Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng α và β

*Tìm đường thẳng a ⊂ α và đường thẳng b ⊂ β sao cho a ⋂ b = I thì I là điểm chung của α và β

Bài 1. Cho 4 điểm A,B,C,D không cùng nằm trong một mặt phẳng

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD chéo nhau

b) Trên các đoạn AB và AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BD tại I. Hãy xét xem điểm I thuộc những mặt phẳng nào? Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (BCD)

Bài 2. Trong mặt phẳng α cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O. Gọi c là một đường thẳng cắt α tại điểm I khác O

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (O,c) và α

b) Gọi M là một điểm trên c khác I.Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b). Chứng minh rằng giao tuyến này luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c

Bài 3. Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến d.Ta lấy hai điểmA ,B thuộc mặt phẳng α nhưng không thuộc d và một điểm O nằm ngoài α và β

Các đường thẳng OA, OB lần lượt cắt β tại A’ và B’.Giả sử đường thẳng AB cắt d tại C

a) Chứng minh rằng ba điểm O, A, B không thẳng hàng

b) Chứng minh rằng ba điểm A’, B’, C thẳng hàng và từ đó suy ra ba đường thẳng AB, A’B’ và d đồng qui

Bài 4. Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AB,AC,BD lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho MN không //BC, MP không //AD. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(MNP)\cap(ABC)$ b) $(MNP)\cap(ABD)$

c) $(MNP)\cap(BCD)$ d) $(MNP)\cap(ACD)$

Bài 5. Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AB,AC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho MN không //BC,trong tam giác BCD lấy điểm I. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(MNI)\cap(ABC)$ b) $(MNI)\cap(BCD)$ c) $(MNI)\cap(ABD)$ d) $(MNI)\cap(ACD)$

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy không phải hình thang.Tìm các giao tuyến sau: a) $(SAC)\cap(SBD)$ b) $(SAB)\cap(SCD)$ c) $(SAD)\cap(SBC)$

Bài 7. Cho tứ diện ABCD.Trong 2 tam giác ABC và BCD lấy 2 điểm M,N.Tìm các giao tuyến sau:

a) $(BMN)\cap(ACD)$ b) $(CMN)\cap(ABD)$ c) $(DMN)\cap(ABC)$

Bài 8. Cho tứ diện ABCD.Trên cạnh AB lấy điểm I ,trong 2 tam giác BCD và ACD lần lượt lấy 2 điểm J,K. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(ABJ)\cap(ACD)$ b) $(IJK)\cap(ACD)$ c) $(IJK)\cap(ABD)$ d) $(IJK)\cap(ABC)$

Bài 9. Cho tứ diện ABCD.Gọi I,J là trung điểm của AD và BC

a) Chứng minh rằng IB và JA là 2 đường thẳng chéo nhau

b) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC)\cap(JAD)$

c) Gọi M là điểmnằm trên đoạn AB; N là điểm nằm trên đoạn AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC)\cap(DMN)$

Bài 10. Cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng và một điểm O nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Gọi A’,B’,C’ là các điểm lần lượt nằm trên các đường thẳng OA,BO,OC. Giả sử $A'B'\cap AB = D$, $B'C'\cap BC = E$, $C'A'\cap CA = F$. Chứng minh rằng 3 điểm D,E,F thẳng hàng

Bài 11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng ngoài đoạn BD.Trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn AB và AD lần lượt tại K và L.Trong mặt phẳng (BCD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn CB và CD lần lượt tại M và N

a) Chứng minh rằng 4 điểm K,L,M,N cùng thuộc một mặt phẳng

b) Gọi $O_1 = BN\cap DM$; $O_2 = BL\cap DK$ và $J = LM\cap KN$. Chứng minh rằng ba điểm A,J,O_1 thẳng hàng và ba điểm C,J,O_2 cũng thẳng hàng

c) Giả sử hai đường thẳng KM và LN cắt nhau tại H,chứng minh rằng điểm H nằm trên đường thẳng AC

Bài 12. Cho tứ diện ABCD. Gọi A’, B’, C’, D’lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC

a)Chứng minh rằng hai đường thẳng AA’ và BB’ cùng nằm trong một mặt phẳng

b)Gọi I là giao điểm của AA’ và BB’,chứng minh rằng : $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{1}{3}$

c)Chứng minh rằng các đường thẳng AA’,BB’,CC’ đồng qui

Bài 13. Cho tứ diện ABCD.Hai điểm M ,N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn luôn đi qua MN,cắt CD và BD lần lượt tại E và F

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn luôn đi qua một điểm cố định

b) Tìm quĩ tích giao điểm I của ME và NF

c) Tìm quĩ tích giao điểm J của MF và NE

Bài 14. Cho tứ diện ABCD.Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.Các điểm M ,N ,P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB ,AC ,AD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I=MN∩BC và J=MP∩BD

a) Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của CD và NI; H = MG ∩ BE ;K = GF ∩ mp(BCD), chứng minh rằng các điểm H ,K ,I ,J thẳng hàng

Vấn đề: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng α

Bước 1: Chọn một mặt phẳng β chứa a (β gọi là mặt phẳng phụ)

Bước 2: Tìm giao tuyến của α và β là đường thẳng d

Bước 3: Gọi M là giao điểm của a với d thì M là giao điểm của a với α

Bài 1: Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AC,BC,BD lần lượt lấy các điểm M,N,K. Tìm các giao điểm sau:

a) CD ∩ (MNK) b)AD ∩ (MNK)

Bài 2: Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AB,AC,BC lần lượt lấy các điểm M, N, P. Tìm các giao điểm sau:

a) MN ∩ (ADP) b) BC ∩ (DMN)

Bài 3: Cho tứ diện ABCD.Trên cạnh AB lấy điểm M,trong tam giác BCD lấy điểm N.Tìm các giao điểm sau:

a) BC∩(DMN) b) AC∩(DMN) c) MN∩(ACD)

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD. Trong tứ giác ABCD lấy một điểm O,tìm giao điểm của AM với các mặt phẳng (SBC) ,(SCD)

Bài 5: Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AB,AC lấy 2 điểm M, N; trong tam giác BCD lấy điểm P. Tìm các giao điểm sau:

a) MP∩(ACD) b) AD∩(MNP) c) BD∩(MNP)

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy không phải hình thang. Trên cạnh SC lấy một điểm E

a) Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABE)

b) Chứng minh rằng 3 đường thẳng AB ,CD và EF đồng qui

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành tâm O.Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC.Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M,N và B

a) Tìm các giao tuyến (P) ∩ (SAB) và (P) ∩ (SBC)

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P)

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SDC)

d) Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, F thẳng hàng

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành .Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC

a) Xác định I = AN ∩ (SBD) và J = MN ∩ (SBD)

b) Tính các tỉ số $\frac{IA}{IN}$; $\frac{JM}{JN}$ và $\frac{IB}{IJ}$

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang đáy lớn AB.Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và SC

a) Xác định giao tuyến (SAD) ∩ (SBC)

b) Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AIJ)

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AIJ)

Bài 10: Cho tứ diện ABCD.Trong 2 tam giác ABC và BCD lấy 2 điểm I,J.Tìm các giao điểm sau: a)IJ $\cap$(SBC) b)IJ$\cap$(SAC)

Bài 11.Cho tứ diện ABCD,gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC.Trên đoạn BD ta lấy điểm P sao cho BP = 2PD.Tìm giao điểm của:

a) CD với mặt phẳng (MNP) b) AD với mặt phẳng (MNP)

Bài 12: Cho tứ diện SABC. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của SA và AB.Trên đoạn SC ta lấy điểm K sao cho CK = 3KS

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (IHK)

b) Gọi M là trung điểm IH.Tìm giao điểm của KM với mặt phẳng (ABC)

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD sao cho ABCD không phải là hình thang.Trên cạnh SC lấy một điểm M

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB)

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng AB,CD,MN đồng qui

Bài 14: Cho 2 hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong 1 mặt phẳng

a)Xác định các giao tuyến sau : (AEC) $\cap$(BFD) ; (BCE) $\cap$(AFD)

b) Lấy 1 điểm M trên đoạn DF. Tìm giao điểm AM$\cap$(BCE)

Bài 15: Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC.Trên cạnh BD, ta lấy điểm K sao cho BK = 2KD

a) Tìm giao điểm E của đường thẳng CD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng DE=DC

b) Tìm giao điểm F của đường thẳng AD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng FA=2FD

c) Chứng minh rằng FK song song IJ

d) Gọi M và N là hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK)

Bài 16: Cho tứ diện SABC.Lấy các điểm A',B',C'lần lượt nằm trên các cạnh SA,SB,SC sao cho SA' = $\frac{1}{3}$ SA ;SB' = $\frac{1}{2}$ SB ;SC' = $\frac{1}{2}$ SC

a) Tìm giao điểm E,F của các đường thẳng A'B' và A'C' lần lượt với mặt phẳng (ABC)

b) Gọi I và J lần lượt là các điểm đối xứng của A' qua B' và C'. Chứng minh rằng IJ = BC và BI = CJ

c) Chứng minh rằng BC là đường trung bình của tam giác AEF

Bài 17: Trong mặt phẳng α cho tam giác đều ABC. Gọi β là mặt phẳng cắt α theo giao tuyến BC.Trong mặt phẳng β ta vẽ hai nửa đường thẳng Bx và Cy song song với nhau và nằm cùng một phía với α. Trên Bx và Cy ta lấy B' và C' sao cho BB'=2CC'.

a) Tìm giao điểm D của đường thẳng BC với mặt phẳng (AB'C') và tìm giao tuyến của mặt phẳng (AB'C') với mặt phẳng α

b) Trên đoạn AC' ta lấy điểm M sao cho AM = $\frac{2}{3}$ AC'.Tìm giao điểm I của đường thẳng B'M với mặt phẳng α và chứng minh I là trung điểm của AD

c) Chứng minh rằng nếu B’ và C’ theo thứ tự chạy trên Bx và Cy sao cho BB’=2CC’ thì mặt phẳng (AB’C’) luôn luôn cắt α theo một giao tuyến cố định
d) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.Cạnh AC cắt DE tại G. Hãy tính tỉ số $\frac{AG}{AC}$ và chứng minh rằng AD = 2AF.

Bài 18: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O.Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA,SB,SC tại A’,B’,C’
a) Dựng giao điểm D’ của mặt phẳng (P) với cạnh SD
b) Gọi I là giao điểm của A’C’ với SO. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=2\frac{SO}{SI}$$

c) Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$

Vấn đề: Dựng thiết diện với hình chóp

Thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng α là phần chung của hình chóp với mặt phẳng α

Phương pháp: để dựng thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng α t ta lần lượt làm như sau

Bước 1:Dựng giao tuyến của α với một mặt nào đó của hình chóp

Bước 2:Giới hạn đoạn giao tuyến là phần của giao tuyến nằm trong mặt đang xét của hình chóp

Tiếp tục hai bước trên với mặt khác của hình chóp cho đến khi các đoạn giao tuyến khép kín tạo thành một đa giác,đa giác ấy là thiết diện

Bài 1: Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh BC,CD,AD lấy các điểm M,N,P.Dựng thiết diện của ABCD với mặt phẳng (MNP).
Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD Trên cạnh SD lấy điểm M. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (BCM).
Bài 3: Cho tứ diện ABCD.Trên các cạnh AB,AC lấy 2 điểm M, N; trong tam giác BCD lấy điểm I. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI)
Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD trên các cạnh SA,AB,BC lấy các điểm M, N, P. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).
Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD trên các cạnh SA,SB,SC lấy các điểm M,N,P.
a) Tìm giao điểm $MN \cap (ABCD)$
b) Tìm giao điểm $NP \cap (ABCD)$
c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(MNP)

Bài 6: Cho tứ diện ABCD.Trong 3 tam giác ABC ,ACD và BCD lần lượt lấy 3 điểm M, N, P.
a) Tìm giao điểm $MN \cap (BCD)$
b) Dựng thiết diện của tứ diện với mặt phẳng(MNP)

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm của SB và SC.
a) Tìm giao tuyến $(SAD) \cap (SBC)$
b) Tìm giao điểm $SD \cap (AMN)$
c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN)

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD.Trong tam giác SCD ta lấy điểmM

a)Tìm giao tuyến (SBM) $\cap$(SAC)

b)Tìm giao điểm của BM $\cap$(SAC)

c)Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(ABM)

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với AB là đáy lớn. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN)

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN)

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi H và K lần lượt là trung điểm các cạnh CB và CD, M là điểm bất kỳ trên cạnh SA. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MHK)

Bài 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy lớn AD = 2BC. Gọi N là trung điểm của SB,M nằm trên cạnh SA sao cho AM = 2MS. Gọi α là mặt phẳng thay đổi qua MN cắt BC và AD tại P và Q

a) Chứng minh rằng 4 đường thẳng MN,AB,CD và PQ đồng qui tại một điểm I

b) Gọi J và K lần lượt là giao điểm của SC và SD với α,chứng minh rằng ba điểm I ,J ,K thẳng hàng

c) Tìm $\alpha \cap$(SAC) và $\alpha \cap$(SBD)

d) Gọi R = MQ$\cap$NP , Chứng minh rằng điểm R chạy trên một đường thẳng cố định khi α thay đổi

Bài 12: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a.Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK)

b) Tính diện tích của thiết diện ấy

Vấn đề: Đường thẳng song song đường thẳng

Định nghĩa: hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Định lý 1:Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song với nhau:

$$a // c \ \& \ b // c \ \Rightarrow a // b$$

Chú ý: Khi hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta có thể sử dụng các định lý đã học để chứng minh chúng song song với nhau:

*hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì // với nhau

*Dùng định lý Talet: Một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì chắn trên hai cạnh kia những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Định lý 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt có chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng ấy

$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha, b \subset \beta \\ a // b \end{cases} \Rightarrow d // a, b$$

Bài 1: Cho tứ diện ABCD.Gọi I,J,K,L lần lượt là trung điểm của AB,BC, CD, DA .Chứng minh rằng IJKL là hình bình hành.

Bài 2: Cho tứ diện ABCD .Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD .Chứng minh rằng HK//AB.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Gọi M, N, P, Q là các điểm trên các cạnh BC, SC, SD, DA sao cho MN//BS, NP//CD, MQ//CD . Chứng minh rằng PQ//SA.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi.Gọi M ,N ,E ,F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA ,SB ,SC ,và SD

a) Chứng minh rằng ME//AC , NF//BD

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng ME ,NF và SO (O là giao điểm của AC và BD) đồng qui

c) Chứng minh rằng 4 điểm M,N,E,F đồng phẳng

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật .Gọi M ,N ,E ,F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC ,SCD ,và SDA. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm M,N,E,F đồng phẳng

b) Tứ giác MNEF là hình thoi

c) Ba đường thẳng ME ,NF và SO đồng qui (O là giao điểm của AC và BD)

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đoạn AC và BF lần lượt lấy các điểm M ,N sao cho: AM = kAC và BN = kBF $(0 < k < 1)$

a) Giả sử k = 1/3 ;chứng minh rằng MN // DE

b) Giả sử MN // DE hãy tính k

Bài 7: Cho tứ diện ABCD .Trên các cạnh AC, BC, AD lấy 3 điểm M,N,P.Dựng giao tuyến (MNP) $\cap$ (BCD) trong các trường hợp sau:

a) PM cắt CD b) PM //CD

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm của SA và SC

a) Dựng các giao tuyến (SAB) $\cap$(SCD) , (DMN) $\cap$(ABCD)

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (DMN)

Bài 9: Cho tứ diện ABCD .Gọi I, J là trung điểm AB, AD .Điểm M thay đổi trên cạnh BC

a) Tìm giao điểm N của CD và (IJM).

b) Gọi H là giao điểm của IM và JN ;K là giao điểm của IN và JM. Tìm tập hợp các điểm H; K khi M thay đổi trên cạnh BC.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AD . Điểm M thay đổi trên cạnh SA

a) Dựng giao điểm N của SD và mặt phẳng(BCM)

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(BCM)

c) Gọi I =BM $\cap$ CN.Tìm tâp hợp điểm I khi M chạy trên SA

Bài 11: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Gọi H,K là trung điểm SA,SB

a) Chứng minh rằng HK//CD

b) Trên cạnh SC lấy điểm M. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(MKH)

Bài 12: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, điểm M thay đổi trên cạnh SD.

a) Dựng giao tuyến (SAD) $\cap$(SBC)

b) Dựng giao điểm N của SC và mặt phẳng(ABM); ABMN là hình gì? Có thể là hình bình hành không?

c) Gọi I là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng khi M chạy trên cạnh SD thì I chạy trên 1 đường thẳng cố định.

Bài 13: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABC. Dựng thiết diện của ABCD với mặt phẳng (IJK)

Bài 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành .Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD).Chứng minh IA =2IM

b) Tìm giao điểm F của SD với (ABM).Chứng minh rằng F là trung điểm của SD và ABMF là một hình thang.

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB.Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SBD).

Bài 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O .M là trung điểm của SC và N là trung điểm của OB

a) Tìm giao điểm I của SD với mặt phẳng (AMN)

b) Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi.Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD. E là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng MN // BD

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE)

c) Gọi H và K lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng LH // BD

<u>Vấn đề: Đường thẳng song song mặt phẳng</u>

Bài 1: Cho tứ diện ABCD .Gọi I, J là trung điểm của BC và CD a)Chứng minh rằng BD//(AIJ)

b)Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác ABC và ACD

Chứng minh rằng HK//(ABD)

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .G là trọng tâm của tam giác SAB và E là điểm trên cạnh AD sao cho DE = 2EA. Chứng minh rằng GE // (SCD)

Bài 3: Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.

a) Gọi M , N là trung điểm của AD,BE.Chứng minh rằng MN//(CDE)

b) Trên các đoạn AC và BF lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho AM = kAC ; BN = kBF (0 < k < 1). Chứng minh rằng MN // (CDEF)

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Gọi M, N là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng α chứa MN và //SA

a)Dựng giao điểm của SC và α

b)Dựng thiết diện của hình chóp với α

Bài 5: Cho tứ diện ABCD.Trên cạnh AB lấy điểm M.Gọi α là mặt phẳng qua M và // 2 cạnh AC,BD. Dựng thiết diện của tứ diện với α

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành ,M là điểm thay đổi trên cạnh AB. Mặt phẳng α qua M và //SA và AD

a) Dựng thiết diện của α với hình chóp .Chứng minh thiết diện là hình thang

b) Chứng minh rằng đoạn giao tuyến của α với(SCD) thì//SD

c) Tìm quĩ tích giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện khi M thay đổi trên cạnh SD

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Điểm M thay đổi trên cạnh BC,mặt phẳng α qua M và //AB và SC

a) Dựng giao tuyến (SAD) $\cap$ (SBC)

b) Dựng thiết diện của hình chóp với α

c) Chứng minh rằng đoạn giao tuyến của α với (SAD) thì //SD

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Gọi M,N là trung điểm SA, SB. Điểm P thay đổi trên cạnh BC

a) Chứng minh rằng CD//(MNP)

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP). Chứng minh rằng thiết diện là hình thang.

c) Gọi I là giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện ,tìm quĩ tích điểm I

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Điểm M thay đổi trên cạnh SA.

a) Tìm các giao tuyến (SAD)$\cap$(SBC) ; (SAB)$\cap$(SCD)

b) Dựng giao điểm N = SB $\cap$(CDM)

c) Gọi I = CM $\cap$DN ; J = DM $\cap$CN. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh SA thì I,J chạy trên 2 đường thẳng cố định

Bài 10: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = CD = a và AB vuông góc CD .Lấy 1 điểm M trên cạnh AC,đặt AM = x (0< x < a). Mặt phẳng α đi qua M và song song với AB và CD cắt BC,BD,AD lần lượt tại N,P,Q

a) Chứng minh rằng MNPQ là 1 hình chữ nhật

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x

c) Xác định x để diện tích MNPQ là lớn nhất

Bài 11: Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc CD,tam giác BCD vuông tại C và góc BDC = 30^0 ; M là 1 điểm thay đổi trên cạnh BD ; AB = BD = a; đặt BM = x . Mặt phẳng α qua M và song song với AB,CD.

a) Dựng thiết diện của tứ diện với α

b) Tính diện tích S của thiết diện

c) Xác định vị trí của M trên BD để S lớn nhất

Bài 12: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a ,SB = b và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M ,đặt AM = x (0 < x < a). Mặt phẳng α qua M ,song song AC và SB lần lượt cắt BC ,SC ,SA tại N,P,Q.

a) MNPQ là hình gì ?

b) Tính diện tích MNPQ. Xác định x để diện tích ấy lớn nhất

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, SAB là tam giác vuông tại A với SA = a.Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh AD, đặt AM = x (0 < x < a). Gọi α là mặt phẳng qua M và song song CD và SA.

a) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α,thiết diện là hình gì

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x

Bài 14: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa lục giác đều ABCD đáy lớn AB = 2a,hai cạnh bên AD và BC cắt nhau tại I. Tam giác SAB cân tại S và SI = 2a. Trên đoạn AI ta lấy một điểm M ,đặt AM = x (0< x < 2a). Mặt phẳng α qua M song song SI và AB lần lượt cắt BI ,SB ,SA tại N ,P ,Q

a) Tính góc giữa SI và AB

b) MNPQ là hình gì ?

c) Tính diện tích MNPQ theo a và x.Tìm x để diện tích ấy lớn nhất. Khi đó MNPQ là hình gì

d) Gọi K = MP ∩ NQ.Tìm quĩ tích điểm K khi M chạy trên đoạn AI

Bài 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O.Gọi M và N là trung điểm của AB và SC

a) Tìm các giao tuyến (SAC) ∩ (SBD) và (SAB) ∩ (SCD)

b) Chứng minh rằng MN //(SAD)

c) Chứng minh rằng đường thẳng AN đi qua trọng tâm của tam giác SBD

d) Gọi P là trung điểm của SA.Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O.Gọi M và N là trung điểm của SA và SC

a) Tìm các giao tuyến (SAC) ∩ (SBD) và (BMN) ∩ (ABCD) ; (BMN) ∩ (SBD)

b) Tìm giao điểm K của SD và (BMN). Chứng minh rằng $SK = \frac{1}{3}SD$

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (BMN)

d) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng MI //(SBC) và (IJN)//(SAD)

<u>Vấn đề: Mặt phẳng song song mặt phẳng</u>

Bài 1. Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau.

a)Chứng minh rằng (ADF)//(BCE)

b)Gọi I,J,K là trung điểm của các cạnh AB,CD,EF.

Chứng minh rằng (DIK)//(JBE)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD.Gọi H,K,L là trọng tâm của các tamgiác ABC, ABD, ACD. Chứng minh rằng (HKL)//(BCD)

Bài 3. Cho 2 tam giác ABC và DEF nằm trên 2 mặt phẳng α, β song song với nhau

a)Dựng các giao tuyến α ∩(AEF); β ∩(BCD)

b)Dựng giao tuyến (AEF) ∩(BCD)

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AD. M là 1 điểm nằm trên cạnh AB,mặt phẳng α qua M và α//(SBC). Dựng thiết diện của hình chóp với α.Thiết diện là hình gì ?

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Điểm M thay đổi trên cạnh BC,mặt phẳng α qua M và // mặt phẳng (SAB)

a)Dựng thiết diện của hình chóp với α,chứng minh thiết diện là hình thang

b)Chứng minh rằng CD // α

c)Tìm quỹ tích giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và D; AD = CD = a ; AB = 2a,tam giác SAB vuông cân tạiA.Trên cạnh AD lấy điểm M.Đặt AM =x. Mặt phẳng α qua M và //(SAB)

a)Dựng thiết diện của hình chóp với α

b)Tính diện tích và chu vi thiết diện theo a và x

Bài 7. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’

a) Chứng minh rằng (BA’C’) // (ACD’)

b) Tìm các giao điểm I = B’D ∩ (BA’C’); J = B’D∩(ACD’). Chứng minh rằng 2 điểm I, J chia đoạn B’D thành 3 phần bằng nhau.

c) Gọi M, N là trung điểm của C’B’ và D’D. Dựng thiết diện của hình hộp với mặt phẳng (BMN).

Bài 8. Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD.Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về cùng 1 phía với α . Một mặt phẳng β cắt 4 nửa đường thẳng ấy lần lượt tại A’,B’,C’,D’

a)Chứng minh rằng mp(AA’,BB’) // mp(CC’,DD’)

b)Chứng minh rằng tứ giác A’B’C’D’ là hình bình hành

c)Chứng minh rằng AA’ + CC’ = BB’ + DD’

Bài 9. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’.Gọi I và I’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B’C’

a)Chứng minh rằng AI // A’I’

b)Tìm giao điểm IA’ ∩(AB’C’)

c)Tìm giao tuyến của (AB’C’) ∩(BA’C’)

Bài 10. Cho lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi I ,K ,G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A’B’C’ và ACC’ . Chứng minh rằng:

a) (IKG) // (BB’C’C) b) (A’KG) // (AIB’)

Bài 11. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’.Gọi H là trung điểm A’B’

a)Chứng minh rằng CB’ // (AHC’)

b)Tìm giao tuyến d = (AB’C’)∩(A’BC) .

Chứng minh rằng d // (BB’C’C)

Bài 12. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’.Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA’ và AC

a)Dựng thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNB’)

b)Gọi P là trung điểm B’C’.Dựng thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP)

Bài 13. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'.Gọi M và N lần lượt là tâm của các mặt bên AA'C'C và BB'D'D. Chứng minh rằng MN//(ABCD).

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a .Mặt bên SAB là 1 tam giác vuông cân tạiA.Trên cạnh AD ta lấy 1 điểm M,đặt AM = x. Mặt phẳng α qua M và //mặt phẳng (SAB) cắt BC,SC,SD lần lượt tại N,P,Q ($0 < x < 2a$)

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x

c) Gọi I = MQ $\cap$ NP.Tìm tập hợp điểm I khi M chạy trêncạnh AD .

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD

a) Xác định giao điểm K = BI $\cap$ (SAC)

b) Trên IC lấy điểm H sao cho HC=2HI. Chứng minh KH//(SAD)

c) Gọi N là điểm trên SI sao cho SN=2NI. Chứng minh (KHN)//(SBC)

d)Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (KHN)

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O.Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SC, AB, AD.

a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD)

b) Tìm giao điểm I của AM $\cap$ (SBD)

c) Gọi J = BP $\cap$ AC .Chứng minh rằng IJ // (SAB)

d) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

<u>Vấn đề: Hình chóp</u>

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$(ABC), SA = a. Tam giác ABC vuông tại B, góc C là 60^o, BC = a.

a) Chứng minh rằng 4 mặt của hình chóp là tam giác vuông.Tính S_{tp}

b) Tính thể tích $V_{S.ABC}$

c) Từ A kẻ AH $\perp$ SB ,AK $\perp$ SC. Chứng minh rằng SC $\perp$(AHK) và ΔAHK vuông

d) Tính thể tích $V_{S.AHK}$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a.Đường cao SA = a, M là trung điểm của SB.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông.Tính diện tích toàn phần hình chóp S.ABCD

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ADM).Tính diện tích thiết diện

c) Thiết diện chia hình chóp làm hai hình đa diện,tính thể tích các khối đa diện ấy

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy và mặt bên SAB là các tam giác đều cạnh a. Chân đường cao SH của hình chóp đối xứng với tâm O của đáy qua cạnh AB

a) Chứng minh rằng các mặt bên SAC và SBC là các tam giác vuông

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC

c) Tính góc giữa các mặt bên và đáy

d) Tính thể tích $V_{S.ABC}$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật ,SA $\perp$(ABCD), SC = a. Cạnh AC và SC lần lượt tạo với đáy các góc $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$

a) Xác định các góc α,β

b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD

Bài 5. Cho hình chóp S.ABC có (SAB)⊥(ABC), tam giác SAB đều và tam giác ABC vuông tại C ,góc BAC = 30^o

a) Tính chiều cao hình chóp

b) Tính thể tích hình chóp

Bài 6. Trên 3 nửa đường thẳng Ox,Oy,Oz vuông góc nhau từng đôi một ta lần lượt lấy 3 điểm A,B,C sao cho OA = OB = OC = a

a) Chứng minh rằng OABC là hình chóp đều

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp OABC

Bài 7. Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và B. AD = 2a,AB = BC = a ; SA ⊥(ABCD) ; cạnh SC tạo với đáy (ABCD) một góc $\varphi = 60^o$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.Tính diện tích toàn phần

b) Tính thể tích S.ABCD

c) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB)

Bài 8. Cho tứ diện SABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B , AB = 2a, BC = $a\sqrt{3}$, SA ⊥ (ABC) ,SA = 2a. Gọi I là trung điểm AB

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông
b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SIC) và (ABC)
c) Gọi N là trung điểm AC ,tính khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SBC)

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a .SA = SB = SC = $\frac{2a\sqrt{3}}{2}$

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

c) Tính diện tích tam giác SBC

Bài 10. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại A, BC=a, SA=SB=SC=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a)Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b)Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc nhau

c)Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)

d)Tính diện tích tam giác (SAC)

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, góc A=60^o, SA=SB=SD=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính hình chóp từ S đến mặt phẳng (ABCD)

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) vuông góc nhau

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SBD) và (SAC) vuông góc nhau và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)

d) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) ⇒ diện tích ΔSBD

Vấn đề: Hình lăng trụ

Bài 1. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A’B’C’ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Gọi I,J là trung điểm BC và BB’.

a) Chứng minh rằng BC’ ⊥ (AIJ)

b) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AIJ) và (ABC)

c) Tính diện tích tam giác AIJ

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, góc A = 60^o , A’A = A’B = A’D = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.

a) Tính chiều cao lăng trụ

b) Chứng minh rằng hai mặt chéo của lăng trụ vuông góc nhau

c) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (A’BD) và (ABCD)

d) Tính diện tích tam giác A’BD cà diện tích toàn phần của lăng trụ

Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’

a)Chứng minh rằng hai mặt chéo vuông góc nhau

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA’ và BD’

c)Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (D’AC) và (ABCD)

d)Tính diện tích tam giác D’AC

Bài 4. Cho lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình thoi cạnh a , góc A = 60^o .Gọi O và O’ là tâm của hai đáy, OO’ = 2a

a)Tính diện tích các mặt chéo của lăng trụ

b)Tính diện tích toàn phần và thể tích của lăng trụ

Bài 5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có đường chéo B’D = 12 . Cạnh đáy CD = 6 ; cạnh bên CC’ = 8

a)Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp

b)Tính góc giữa B’D và các mặt hình hộp

Bài 6. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình thoi ABCD cạnh a,tâm O và góc A = 60^o ; D’O vuông góc (ABCD) ; cạnh bên tạo với đáy một góc φ = 60^o

a) Xác định góc φ và tính chiều cao , cạnh bên của hình hộp

b) Chứng minh rằng BD’ ⊥ A’C’

c) Chứng minh rằng các mặt bên của hình hộp bằng nhau,suy ra S_{tp}

d) Tính thể tích hình hộp và thể tích tứ diện ACDC’

Bài 7. Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a,cạnh bên = a và hình chiếu của C’ trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của tam giác ABC

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy,chiều cao của lăng trụ

b) Chứng minh rằng các mặt bên AA’C’C và BB’C’C bằng nhau ; mặt bên ABB’A’ là hình vuông.Từ đó tính diện tích toàn phần của lăng trụ

c) Tính thể tích tứ diện OBCB’

Bài 8. Cho lăng trụ đều ABC.A’B’C’ có cạnh đáy bằng a .Đường chéo AB’ của mặt bên tạo với đáy một góc φ = 60^o. Gọi I là trung điểm BC

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ

b) Xác định hình chiếu của A trên BB’C’C

c) Tính góc giữa đường thẳng AB’ và mặt phẳng (BB’C’C)

d) Tính thể tích tứ diện BAIC’

Bài 9. Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a; cạnh bên AA’ = a và hình chiếu của B’ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm I của AC

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy

b) Tính thể tích lăng trụ

c) Tính thể tích tứ diện AIBC’

Bài 10. Cho lăng trụ ABCD.A’B’C’D’ có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a; góc A = 60^o ;B’O vuông góc (ABCD) ; cạnh bên bằng a.

a)Tính góc giữa cạnh bên và đáy và thể tích của lăng trụ

b)Chứng minh rằng hai mặt chéo vuông góc nhau
c)Tính diện tích toàn phần lăng trụ
Bài 11. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A, AC = a, góc BCA là 60^o . BC' tạo với mặt phẳng (AA'C'C) một góc $\alpha = 45^o$
a) Xác định α và tính chiều cao lăng trụ
b) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ
Bài 12. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy = a, đường chéo BC' tạo với mặt phẳng (AA'B'B) một góc $\alpha = 30^o$
a) Xác định α và tính chiều cao lăng trụ
b) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ
Bài 13. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều ABC cạnh a,điểm A' cách đều A,B,C và AA' tạo với đáy một góc $\varphi = 60^o$
a) Chứng minh rằng mặt bên BB'C'C là một hình chữ nhật
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích lăng trụ
c) Tính thể tích tứ diện ABB'C

Vấn đề: Mặt cầu

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD) , ABCD là hình chữ nhật và AB = a , SA = BC = 2a. Chứng minh rằng 5 điểm S,A,B,C,D cùng nằm trên 1 mặt cầu.Tìm tâm ,bán kính của mặt cầu đó
Bài 2. Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC) . BE , BF là đường cao của tam giác ABC và SBC . Gọi H và H' lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC
a) Chứng minh rằng SH' , AH và BC đồng qui tại một điểm I
b) Chứng minh rằng 5 điểm E,F,I,S,B ở trên một mặt cầu
Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$(ABCD) và ABCD là hình vuông cạnh a.Dựng mặt phẳng β đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC,β lần lượt cắt SB ,SC ,SD tại B', C', D'
a) Chứng minh rằng các điểm A,B,C,D,B',C',D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định
b) Tính diện tích mặt cầu ấy
Bài 4. Trong mặt phẳng α cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đường kính AD.Trên đường thẳng $\perp \alpha$ tại A ta lấy điểm S .Gọi H,K là hình chiếu của A trên SB và SC

a) Chứng minh rằng các tam giác AHD,AKD vuông
b) Chứng minh rằng 5 điểm A,B,C,H,K nằm trên 1 mặt cầu

Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy = a,cạnh bên = 2a.Tìm tâm,bán kính mặt cầu đi qua 4 điểm S,A,B,C
Bài 6. Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB = 2R .Trên đường tròn ta lấy 1 điểm C.Kẻ CH $\perp$ AB (H$\in$ AB).Gọi I là trung điểm CH .Trên tia $I_x \perp \alpha$ ta lấy điểm S sao cho $S\hat{H}I = 60^o$. Chứng minh rằng $\Delta SAB = \Delta CAB$.từ đó suy ra tâm ,bán kính của mặt cầu đi qua 4 đỉnh S,A,B,C
Bài 7. Cho tứ diện SABC có SA $\perp$ (ABC) ,và các cạnh SA = a AB = b, AC = c.Xác định tâm,bán kính mặt cầu đi qua 4 đỉnh S,A,B,C trong các trường hợp sau:

a) $B\hat{A}C = 90^o$
b) $B\hat{A}C = 60^o$ và b = c

c) $\widehat{BAC} = 120^o$ và b = c

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và SA = a. ABCD là là hình thang vuông tại A và B có AB = BC = a và AD = 2a. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE

Bài 9. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a

a)Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD)

b)Tính góc giữa cạnh bên và đáy

c)Tính góc giữa mặt bên và đáy

d)Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Bài 10. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Cạnh bên hợp với đáy 1 góc $\varphi = 60^o$

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

b) Tính góc giữa mặt bên và đáy

Bài 11. Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC) và đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên (SBC) hợp với đáy 1 góc $\varphi = 30^o$

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC)

Vấn đề: Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng ,đường thẳng

Bài 1. Cho mặt cầu tâm O đường kính AB = 2R. Điểm H thuộc đoạn AB sao cho AH=$\frac{4}{3}$R. Mặt phẳng $\alpha \perp$ AB tại H, cắt mặt cầu theo đường tròn (L).Tính diện tích (L).

Bài 2. Cho mặt cầu S(O,R) ; A là 1 điểm nằm trên mặt cầu. Mặt phẳng α qua A sao cho góc giữa OA và α bằng 30^o

a) Tính diện tích đường tròn thiết diện giữa α và mặt cầu

b) Đường thẳng qua A và $\perp \alpha$ cắt (S) tại B.Tính độ dài AB

Bài 3. Cho mặt cầu S(O;R) tiếp xúc 3 cạnh tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng hình chiếu H của O trên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

b) Biết độ dài 3 cạnh của ΔABC là 6,8,10 và R = 3.Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

Bài 4. Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB tâm O.Gọi M là điểm nằm trên đường tròn .Trên đường thẳng $\perp \alpha$ tại A ta lấy điểm C.Gọi H là hình chiếu của A trên mặt cầu

a) hứng minh rằng H nằm trên mặt cầu (O)

b) Biếp tuyến với (O) tại A và M cắt nhau tại K. Chứng minh rằng KA=KM=KH.Từ đó suy ra KH là tiếp tuyến của mặt cầu (O).

Bài 5. Cho mặt cầu (O;R) và một điểm A biết OA = 2R. Qua A kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại B và một cát tuyến cắt mặt cầu tại C và D sao cho CD = $R\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài đoạn AB

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD

Bài 6. Cho mặt cầu (O;R) tiếp xúc mặt phẳng (P) tại I.Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O.Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại A và B. Chứng minh rằng $AB^2 = AI^2 + IB^2$

Bài 7. Chứng minh rằng nếu một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một tứ diện thì tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau

Vấn đề: KHỐI TRỤ, NÓN, CẦU

BÀI TOÁN 1: Khối nón

Bài 1: Thiết diện qua trục của một khối nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón .

b) Tính thể tích của khối nón.

Bài 2: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.

Bài 3: Hình nón có đường sinh bằng 1 và góc giữa đường sinh và đáy là 45^0

a) Tình diện tích xung quanh của hình nón.

b) tính thể tích của khối nón.

Bài 4: Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc IOM bằng 30^0 và cạnh IM = a. khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay.

b/ Tính thể tích của khối nón tròn xoay .

Bài 5: Cho hình nón đỉnh S đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho d(O,AB) = a và $\angle SAO = 30^0$, $\angle SAB = 60^0$.

a/ Tính độ dài đường sinh và diện tích xung quanh của hình nón theo a.

b/ Tính thể tích của khối nón.

Bài 6: Một tứ diện đều cạnh a nội tiếp một khối nón. Tính thể tích của khối nón đó.

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h, $\angle SAB = \alpha$ ($\alpha > 45^0$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đtròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD.

BÀI TOÁN 2: Khối trụ

Bài 1: Một khối trụ có bán kính r = 5cm, khoảng cách hai đáy bằng 7cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm.

a/ Tính diện tích của thiết diện và diện tích xung quanh của hình trụ.

b/ Tính thể tích khối trụ.

Bài 2: Thiết diện chứa trục của khối trụ là hình vuông cạnh a

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b/ Tính thể tích khối trụ.

Bài 3: Trong không gian cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một htrụ tròn xoay.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b/ Tính thể tích của khối trụ .

Bài 4: Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4 nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích khối trụ đó.

Bài 5: Một hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c nội tiếp trong một khối trụ.

Tính thể tích của khối trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Bài 6: Một khối trụ có chiều cao bằng 20cm và có bán kính đáy bằng 10cm. Người ta kẻ hai bán kính OA và O'B' lần lượt trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc 30^0. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục OO' của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

Bài 7: Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao bằng $R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

Bài 8: Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b/ Tính thể tích của khối trụ.

BÀI TOÁN 3: Thể tích khối cầu. Hình cầu liên quan đến đa diện

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a/ Gọi O là trung điểm của SC. Chứng minh: OA = OB = OC = SO. Suy ra bốn điểm A, B, C, S cùng nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

b/ Cho SA = BC = a và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu .

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và K là hình chiếu của B trên SC.

a) Chứng minh ba điểm O, A, K cùng nhìn đoạn SB dưới một góc vuông. Suy ra năm điểm S, D, A, K, B cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nói trên.

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

189 BÀI TẬP HAY ĐƯỢC TUYỂN CHỌN THEO CHỦ ĐỀ

HÌNH GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

I. TÍCH VÔ HƯỚNG, TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Bài 1. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$:

$a)\ \vec{a}=(4;3;1),\ \vec{b}=(-1;2;3)$

$b)\ \vec{a}=(2;5;4),\ \vec{b}=(6;0;-3).$

Bài 2. Trên mp(Oxz) tìm điểm cách đều 3 điểm: A(1; 1; 1), B(-1; 1; 0) và C(3; 1;-1).

Bài 3. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong mỗi trường hợp sau đây:

$a)\ \vec{a}=(1;-1;1),\ \vec{b}=(0;1;2),\ \vec{c}=(4;2;3)$

$b)\ \vec{a}=(4;3;4),\ \vec{b}=(2;-1;2),\ \vec{c}=(1;2;1)$

$c)\ \vec{a}=(4;2;5),\ \vec{b}=(3;1;3),\ \vec{c}=(2;0;1)$

$d)\ \vec{a}=(-3;1;-2),\ \vec{b}=(1;1;1),\ \vec{c}=(-2;2;1).$

Bài 4. Cho ba điểm A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1).

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính chu vi và diện tích ΔABC.

c) Tìm tọa độ đỉnh D để tứ giác ABDC là hình bình hành.

d) Tính độ dài đường cao của ΔABC hạ từ đỉnh A.

e) Tính các góc của ΔABC.

Bài 5. Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1).

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Tìm góc tạo bởi các cạnh đối diện của tứ diện ABCD.

c) Tính thể tích tứ diện ABCD và tính độ dài đường cao của tứ diện hạ từ A.

Bài 6. Cho Δ ABC biết A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3). Hãy tìm độ dài đường phân giác trong của góc B.

Bài 7. Trong hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm A(1; 1; 0), B(0; 2;1), C(1; 0; 2), D(1;1 ;1).

a) CMR: A, B, C, D tạo thành tứ diện. Tính thể tích của khối tứ diện ABCD.

b) Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh C của tứ diện đó.

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABD hạ từ đỉnh B.

d) Tính góc ABC và góc giữa hai đường thẳng AB, CD.

Bài 8. Cho 3 điểm A (3;-4;7),B(-5; 3; -2) ,C(1; 2; -3).

a) Xác định điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành .

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường chéo.

c) Tính diện tích ΔABC, độ dài BC từ đó đường cao tam giác ABC vẽ từ A.

Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Bài 9. Cho 4 điểm A(2; 0; 0) , B(0; 4; 0) , C(0; 0; 6), D (2; 4 ;6).

a) CMR: 4 điểm A, B , C , D không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện ABCD .

c) Tính diện tích tam giác ABC , từ đó suy ra chiều cao của tứ diện vẽ từ D.

d) Tìm tọa độ chân đường cao của tứ diện vẽ từ D .

Bài 10. Trong hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(3;4;-1) , B(2;0;3), C(-3;5;4)

a) Tính cosin các góc A, B, C của ΔABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 11. Cho tam giác ABC, A(1;0;-2), B(2;1;-1), C(1;-2;2).

a) Tìm toạ độ trung điểm I của cạnh BC.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

d) Tính đường cao của tam giác hạ từ A.

Bài 12. Cho $\vec{a}=\left(\frac{m^2-3}{2};m^2;m^2\right)$, $\vec{b}=\left(1;\frac{-m^2-1}{2};1\right)$, $\vec{c}=\left(4;4;m^2\right)$

a) Chứng minh với mọi m thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b) Phân tích $\vec{d}=\left(1;-1;\frac{3}{2}\right)$. theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Bài 13. Cho ba véc tơ:

$$\vec{p}=\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2};a^2;a^2\right),\ \vec{q}=\left(b^2;\frac{b^2-a^2-c^2}{2};b^2\right),\ \vec{r}=\left(c^2;c^2;\frac{c^2-a^2-b^2}{2}\right)$$

Với a, b, c không đồng thời bằng không thì $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ có đồng phẳng không.

Bài 14. Cho Δ ABC biết A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5). Hãy tìm độ dài đường phân giác trong BB' của góc B.

Bài 15. Cho Δ ABC biết A(-11; 8; 4), B(-1; -7; -1), C(9; -2; 4).

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 16. Cho điểm A(3;5;-4), B(-1;1;2), C(-5;-5;-2), A'(5;1;5), B'(4;3;2), C'(-3;-2;1).

a) Chứng minh tam giác ABC cân, tam giác A'B'C' vuông.

b) Gọi G, G', G'' là trọng tâm Δ ABC, Δ A'B'C' và của tứ diện A'ABC.

Tính $\tan\widehat{G'GG''}$.

Bài 17. Chứng minh 4 điểm A(3; 3; 3), B(1; 2; -1), C(4; 1; 1), D(6; 2; 5) là các đỉnh của hình bình hành.

Bài 18. Chứng minh 4 điểm A(5; 2; -3), B(6; 1; 4), C(-3; -2; -1), D(-1; -4; 13) là các đỉnh của hình thang. Tính diện tích của nó.

Bài 19. Cho hai điểm A(-2; 0; 4), B(5; -2; -14).

Tìm điểm E trong mặt phẳng Oyx sao cho: $OE = 1$, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ đồng phẳng.

Bài 20. Cho hai véc tơ $\vec{p} = (1;-1;3)$, $\vec{q} = (2;-2;1)$. Tìm véc tơ $\vec{v}$ thoả mãn điều kiện $\vec{v} \perp \vec{p}$; $|\vec{v}| \perp |\vec{q}|$; $\vec{v}, \vec{p}, \vec{q}$ đồng phẳng.

Bài 21. Cho A(-3; 2; 4), B(2; 5; -2), C(1; -2; 2), D(4; 2; 3)

a) Tính cos($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$).

b) Tính diện tích tam giác BCD.

c) Tính độ dài đường cao hạ từ A của tứ diện ABCD.

d) Tính cosin góc gữa AD và mặt phẳng (BCD).

e) Tính cosin góc gữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

II. MẶT PHẲNG

BÀI TOÁN 1. Phương trình mặt phẳng

Bài 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt $\vec{n}$ biết

a) $M(3;1;1)$, $\vec{n} = (-1;1;2)$

b) $M(-2;7;0)$, $\vec{n} = (3;0;1)$

Bài 2: Lập phương trình mặt phẳng trung trực của AB biết:

a) A(2; 1; 1), B(2; -1; -1)

b) A(1; -1; -4), B(2; 0; 5)

Bài 3: Lập phương trình mp(α) đi qua điểm M và song song với mp(β) biết:

a) $M(2;1;5)$, $(\beta) = (Oxy)$

b) $M(-1;1;0)$, $(\beta): x - 2y + z - 10 = 0$

c) $M(1;-2;1)$, $(\beta): 2x - y + 3 = 0$

Bài 4 Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M(2;3;2) và cặp VTCP là $\vec{a}(2;1;2)$; $\vec{b}(3;2;-1)$.

Bài 5: Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua M(1; 1; 1) và

a) Song song với các trục 0x và 0y.

b) Song song với các trục 0x, 0z.

c) Song song với các trục 0y, 0z.

Bài 6: Lập phương trình của mặt phẳng đi qua 2 điểm M(1;-1;1) và B(2;1;1) và cùng phương với trục 0x.

Bài 7: Xác định toạ độ của véc tơ $\vec{n}$ vuông góc với hai véc tơ $\vec{a}(6;-1;3)$; $\vec{b}(3;2;1)$.

Bài 8: Tìm một VTPT của mặt phẳng (P) ,biết (P) có cặp VTCP là $\vec{a}(2,7,2)$; $\vec{b}(3,2,4)$

Bài 9: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) biết :

a) (P) đi qua điểm A(-1;3;-2) và nhận $\vec{n}(2,3,4)$; làm VTPT.

b) (P) đi qua điểm M(-1;3;-2) và song song với (Q): x + 2y + z + 4 = 0.

Bài 10: Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng đi qua I(2;6;-3) và song song với các mặt phẳng toạ độ.

Bài 11: (ĐHL-99) :Trong không gian 0xyz cho A(-1;2;3) và hai mp(P): x – 2 = 0, mp(Q) : y – z – 1 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

Bài 12: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm A(0;-1;4) và có cặp VTCP là $\vec{a}=(3;2;1)$ và $\vec{b}=(-3;0;1)$

b) Đi qua hai điểm B(4;-1;1) và C(3;1;-1) và cùng phương với trục với 0x.

Bài 13: Cho tứ diện ABCD có A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6).

a) Viết phương trình tổng quát các mặt phẳng (ABC) (ACD) (ABD) (BCD).

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Bài 14: Viết phương trình tổng quát của (P)

a) Đi qua ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3) .

b) Đi qua A(1;2;3), B(2;2;3) và vuông góc với mp(Q) : x + 2y + 3z + 4 = 0.

c) Chứa 0x và đi qua A(4;-1;2).

d) Chứa 0y và đi qua B(1;4;-3).

Bài 15: Cho hai điểm A(3;2;3) B(3;4;1) trong không gian 0xyz

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) là trung trực của AB.

b) Viết ptmp(Q) qua A, vuông góc với (P) và vuông góc với mp (oyz)

c) Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và song song với mặt phẳng (P)**.**

BÀI TOÁN 2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Bài 1: Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau:

a) (P_1): y – z + 4 = 0, và $(P_2): x-y+z-3=0$.

b) (P_1): x + y – z – 4 = 0và $(P_2): 2x+2y-2z-8=0$.

BÀI TOÁN 3: Chùm mặt phẳng

Bài 1: Lập phương trình mặt phẳng qua M(2;1;3) và đi qua đường thẳng (d):

a) $(d):\begin{cases}2x-y+3z-5=0\\x-2y+z-1=0\end{cases}$, b) $(d):\begin{cases}x=-t\\y=2+2t\\z=1+2t\end{cases}$

Bài 2:Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(2;1;-1) và qua giao tuyến của hai mp(P_1) và (P_2) có phương trình (P_1): x - y + z - 4 = 0 và (P_2): 3x – y + z – 1 = 0.

Bài 3: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\x-2z=0\end{cases}$ và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình: 11x - 2y - 15z – 6 = 0.

Bài 4: Lập ptrình mp(α) qua giao tuyến của (P): y + 2z – 4 = 0 ,(Q): x + y – z – 3 = 0 và song song với mặt phẳng (R): $x+y+z-2=0$.

Bài 5: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\x-2z=0\end{cases}$ và vuông góc với (Q) có phương trình:

a) (ĐHNNI-95): (Q): $x-2y+z+5=0$.

b) $(Q): x+y-3z+1=0$

Bài 6: Lập phương trình của mp qua giao tuyến của hai mp(P_1): $3x-y+z-2=0$, (P_2): $x+4y-5=0$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $2x-z+7=0$.

Bài 7: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\x-2z=0\end{cases}$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình :

a) $(d):\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\x+3y-2z+3=0\end{cases}$

b) $(d):\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{5}$

Bài 8:Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\begin{cases}x-2y=0\\3x-2y+z-3=0\end{cases}$ và vuông góc đường thẳng (d) có phương trình :

a) $(d):\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\x+3y-2z+3=0\end{cases}$, b) $(d):\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{5}$

Bài 9: Lập phương trình mp(P) chứa đthẳng (d) và hợp với mp(Q) một góc 60^0 biết:

$(d):\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\x-2z=0\end{cases}$ và (Q):3x + 4y – 6 = 0.

Bài 10: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $(d):\begin{cases}x-3z-2=0\\y+5z-1=0\end{cases}$ và có khoảng cách từ điểm A(1;-1; 0) tới (P) bằng 1.

Bài 11: Cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x-z-2=0\\y+z-1=0\end{cases}$ và hai mp(P_1): 5x + 5y – 3z – 2 = 0 và mp(P_2): 2x – y + z – 6 = 0. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) sao cho: $(P)\cap(P_1)$ và $(P)\cap(P_2)$ là hai đường vuông góc.

Bài 12: (ĐHKT-93): cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình :

$(d_1):\begin{cases}x-8z+23=0\\y-4z+1=0\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}x-2z-3=0\\y+2z+2=0\end{cases}$.

a) Viết ptrình các mp $(P_1),(P_2)$ song song với nhau và lần lượt chứa $(d_1),(d_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2).

c) Lập phương trình đường thẳng (D) song song với trục Oz và cắt cả 2 đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

BÀI TOÁN 4. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Bài 1:Tính khoảng cách từ điểm M(2;2;1) đến mp(P) trong các trường hợp sau:

a) (P): $2x+y-3z+3=0$

b) $(P):-x-2y-3z+1=0$

Bài 2: Trong hệ Oxyz, cho tứ diện có 4 đỉnh A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)

a) Lập phương trình tổng quát mặt phẳng (ABC).

b) Tính độ dài đường cao hạ từ D của tứ diện, từ đó suy ra thể tích của tứ diện .

Bài 3: Trong hệ Oxyz, cho tứ diện ABCD: A(1;1;1), B(-2;0;2), C(0;1;-3), D(4;-1;0)

a) (ĐH Luật 1996) Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh D của tứ diện.

b) Viết phương trình mp phân giác của hai mặt (ABC) và (BCD) cắt đoạn AD.

III. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI TOÁN 1. Phương trình đường thẳng

Bài 1:Lập phương trình đường thẳng (d) trong các trường hợp sau :

a) (d) đi qua điểm M(1;0;1) và nhận $\vec{a}(3;2;3)$ làm VTCP.

b) (d) đi qua 2 điểm A(1;0;-1) và B(2;-1;3).

Bài 2: Trong không gian Oxyz lập phương trình tổng quát của các giao tuyến của mặt phẳng $(P): x-3y+2z-6=0$ và các mặt phẳng toạ độ.

Bài 3: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M(2;3;-5) và song song với đường thẳng (d) có phương trình: $\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\x+3y-2z+3=0\end{cases}$.

Bài 4: Cho đường thẳng (D) và mặt phẳng (P) có phương trình là :

$(d):\begin{cases}3x-y+4z+1=0\\2x+3y+z+7=0\end{cases}$ và (P): x+y+z+1=0

Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng (t) đi qua A(1;1;1) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (D).

Bài 5: Cho mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;9). Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó.

BÀI TOÁN 2. Chuyển dạng phương trình đường thẳng

Bài 1:Tìm véc tơ chỉ phương của các đường thẳng sau:

a) $(d): x-1=-2y+2=z+1$

b) $(d):\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$

Bài 2: Cho đường thẳng (d) có phương trình $(d):\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$. Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng đó.

Bài 3: Cho đường thẳng (d) có phương trình : $(d):\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$.

Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng đó.

Bài 4: Cho đường thẳng (d) có phương trình : $(d):\begin{cases} x=-t \\ y=2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$, $t \in R$.

Hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Bài 5: Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2;1;3) và vuông góc với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $(P):\ x+2y+3z-4=0$.

b) $(P): x+2y+3z-1=0$.

Bài 6: Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1;2;3) và song song với đường thẳng (Δ) cho bởi :

a) $(\Delta):\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-3+t \end{cases}$ $t \in R$.

b) $(\Delta):\begin{cases} x+y-1=0 \\ 4x+z+1=0 \end{cases}$

Bài 7:Lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1;2;3) và vuông góc với 2 đường thẳng :

$(d_1):\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$, $(d_2):\begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$.

Bài 8: Trong không gian Oxyz, lập phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(3;2;1), song song với mp(P) và vuông góc với đường thẳng (Δ). Biết mặt phẳng

$(P):\ x+y+z-2=0$ và $(\Delta):\begin{cases} x+y-1=0 \\ 4y+z+1=0 \end{cases}$.

BÀI TOÁN 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Bài1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ,biết:

a) $(d):\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2+t \end{cases}$, t∈ R (P): x – y + z + 3 = 0

b) $(d):\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+t \\ z=1+t \end{cases}$, t∈ R (P): y + 4z + 17 = 0

c) $(d):\begin{cases} 2x+3y+6z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$ (P): y + 4z + 17 = 0

Bài 2: Hãy tính sin của góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) cho bởi :

a) $(d):\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases}$ (t∈ R) và $(P): x-2y+3z-1=0$.

b) $(d):\begin{cases} 2x+3y+6z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$ và $(P): x-2z+3y-1=0$.

c) $(d):\begin{cases} x=1+\sqrt{2}t \\ y=-2+t \\ z=2+\sqrt{2}t \end{cases}$, t∈ R và $(P):\ x-2y+2z+3=0.$

Bài 3: (ĐHNN_TH-98): Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình

(P): 2x + y + z = 0 và $(d):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$.

a) Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P) .

b) Lập phương trình đường thẳng (d_1) qua A, (d_1) ⊥ (d) và nằm trong mp(P) .

Bài 4: (ĐH Khối D-2002): Trong không gian 0xyz ,cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d_m) có phương trình

$(P): 2x-y+2=0$, $(d_m):\begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$ xác định m để (d_m)//(P).

BÀI TOÁN 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Bài 1: sử dụng tích hỗn tạp xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình cho bởi:

$(d_1):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6+4t \end{cases}$ t∈ R, $(d_2):\begin{cases} 4x+y-19=0 \\ x-z+15=0 \end{cases}$

Bài 2: Trong không gian 0xyz ,cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1):\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, \ (d_2):\begin{cases} x = 3 + 2t_1 \\ y = -3 - t_1 \\ z = 1 - t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R).$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau .

b) Viết phương trình đường thẳng (d) song song ,cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2) .

Bài 3: Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{-4}, \ (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau .

b) Viết phương trình đường thẳng (d) song song ,cách đều (d_1), (d_2) và thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Bài 4*: Trong không gian 0xyz ,cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1):\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \ t \in R \ , \ (d_2):\begin{cases} 4x + y - 19 = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau .

b) Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài5: Trong không gian 0xyz ,cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi

$$(d_1): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3} \ \ (d_2):\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau.

b) Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài 6: Trong không gian 0xyz ,cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$$(d_1):\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \ (d_2):\begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = t_1 \end{cases} \quad (t, t_1 \in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình mp(P) song song, cách đều (d_1), (d_2) .

Bài 7: Trong không gian 0xyz, cho 2 đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi:

$$(d_1):\begin{cases} x + 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}, \ (d_2):\begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) song song, cách đều (d_1), (d_2) .

Bài8: Trong không gian với hệ tọa độ 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi:

$(d_1): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ $(d_2): \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z-5=0 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) song song, cách đều (d_1), (d_2) .

BÀI TOÁN 5. Hai đường thẳng đồng phẳng và bài tập liên quan

Bài 1: (ĐHBK-TPHCM-93): Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1), (d_2) ,biết:

$(d_1): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ $(d_2): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{2}$

Bài 2: (ĐHSPII-2000): Cho điểm A(1;-1;1) và hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi :

$(\mathrm{d}_1): \begin{cases} 3\mathrm{x} - \mathrm{y} - \mathrm{z} + 3 = 0 \\ 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 1 = 0 \end{cases}$ $(d_2): \begin{cases} x = t \\ y = -1-2t \\ z = -3t \end{cases}$ $(\mathrm{t} \in R)$

CMR (d_1), (d_2) và điểm A cùng thuộc mặt phẳng.

Bài 3: Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi :

$(\mathrm{d}_1): \begin{cases} 2\mathrm{x} + \mathrm{y} + 1 = 0 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} + z - 1 = 0 \end{cases}$ $(d_2): \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

a) CMR hai đường thẳng đó cắt nhau.

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1), (d_2).

c) Viết phương trình đường phân giác của (d_1), (d_2).

Bài 4: Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi :

$(d_1): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ $(d_2): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t+2 \\ z = -1+3t \end{cases}$ $(\mathrm{t} \in R)$

a) CMR hai đường thẳng đó cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm của nó.

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1), (d_2).

c) Viết phương trình đường phân giác của(d_1), (d_2).

Bài 5: cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi :

$(d_1): \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{3}$, $(d_2): \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song với nhau.

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa (d_1), (d_2).

c) Viết phương trình đường thẳng (d) trong (P) song song cách đều (d_1), (d_2) .

BÀI TOÁN 6. Hai đường thẳng chéo nhau và bài tập liên quan

Bài 1: (ĐHNN-96): cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi :

$$(d_1):\begin{cases}x=-7+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases}\quad (d_2):\begin{cases}x=1+t_1\\y=-9+2t_1\\z=-12-t_1\end{cases}\quad (\mathrm{t},\mathrm{t}_1\in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) .

Bài 2: (ĐHTCKT-96): Trong không gian 0xyz , cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi : (d_1): $x=-y+1=z-1$, (d_2): $-x+1=y-1=z$. Tìm toạ độ điểm A_1 thuộc (d_1) và toạ độ điểm A_2 thuộc (d_2) để đường thẳng A_1A_2 vuông góc với (d_1) và vuông góc với (d_2) .

Bài 3: (ĐH L 1996) Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi :

$$(d_1):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=-1\end{cases},\qquad (d_2):\begin{cases}x=2t_1\\y=1+t_1\\z=t_1\end{cases}\quad (\mathrm{t},\mathrm{t}_1\in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.Viết phương trình mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và lần lượt chứa (d_1), (d_2).

b) Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2) .

Bài 4: (ĐHTS-96): Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi :

$$(d_1):\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3+2t\\z=2-1\end{cases}\quad (\mathrm{t}\in \mathrm{R})\qquad (d_2):\begin{cases}3x-2y-8=0\\5x+2z-12=0\end{cases}$$

a) CMR hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau. Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2).

b) Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) .

Bài 5: : (PVBC 99) Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) ,biết:

$$(d_1):\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1};\ (d_2):\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{-2}$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) .

Bài 6: (ĐHSPQui Nhơn-D-96): cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) ,biết:

$$(\mathrm{d}_1):\begin{cases}\mathrm{x}+\mathrm{y}=0\\\mathrm{x}-\mathrm{y}+z-4=0\end{cases}\quad (d_2):\begin{cases}x=1+3t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}\quad (\mathrm{t}\in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2).

Bài 7: : cho hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết:

$$(d_1):\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}\quad (d_2):\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d_1), (d_2) .

Bài 8: (ĐH Huế 1998) Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình cho bởi :

$$(d_1):\begin{cases}x=2+2_1t\\ y=-1+t_1\\ z=1\end{cases},\ (d_2):\begin{cases}x=1\\ y=1+t_2\\ z=3-t_2\end{cases}\quad (t_1,t_2\in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2) .

c) Tính khoảng cách giữa (d_1), (d_2) .

Bài 9: (ĐHNN-97): Cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) có phương trình cho bởi :

$$(d_1):\begin{cases}x+y+2z=0\\ x-y+z+1=0\end{cases},\ (d_2):\begin{cases}x=-2+2t\\ y=-5t\\ z=2+t\end{cases}\quad (t\in R)$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M(1,1,1) và cắt (d_1), (d_2) .

Bài 10: (ĐHKT-98): Cho tứ diện SABC với các đỉnh S(-2;2;4), A(-2;2;0), B(-5;2;0), C(-2;1;1). Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối SA và SB.

IV. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

BÀI TOÁN 1: Đường thẳng đi qua một điểm cắt cả hai đường thẳng cho trước.

Bài 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1;2;3) và cắt cả hai đường thẳng

a) $(d_1):\begin{cases}x+8z+23=0\\ y-4z+10=0\end{cases}$ $(d_2):\begin{cases}x-2z-3=0\\ y+2z+2=0\end{cases}$

b) $(d_1):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ $(d_2):\begin{cases}x+2y-z=0\\ 2x-y+3z-5=0\end{cases}$

Bài 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và cắt cả hai đường thẳng:

$$(d_1):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-3+3t\end{cases}\ t\in R,\ (d_2):\begin{cases}x=u+2\\ y=-3+2u\\ z=3u+1\end{cases}$$

Bài 3: Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2):

$$(\Delta):\begin{cases}x+y+2z=0\\ x-y+z+1=0\end{cases},\ (d_1):\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}\ t\in R,\ (d_2):\begin{cases}x+2z-2=0\\ y-3=0\end{cases}.$$

Bài 4: (ĐHDL-97): Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1;-1;0) và cắt cả hai đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ $(d_2):\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Bài 5: (ĐHTS-99): Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1;-1;0) và cắt cả hai đường thẳng:

$$(d_1):\begin{cases}3x-2y-8=0\\5x+2z-12=0\end{cases},\ (d_2):\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3-2t\\z=2-t\end{cases}\ (t\in R).$$

Bài 6: Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với (P) :x+y+z-2=0 và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2):

$$(d_1):\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}\ t\in R,\ (d_2):\begin{cases}x+2z-2=0\\y-3=0\end{cases}.$$

Bài 7: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ và cắt cả 2 đường thẳng (d_1) và (d_2):

$$(d_1):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=3t-3\end{cases}\ t\in R,\ (d_2):\begin{cases}x=u+2\\y=-3+2u\\z=3u+1-3=0\end{cases}.$$

BÀI TOÁN 2: Đường thẳng qua 1điểm, vuông góc với 2đường thẳng cho trước.

Bài 1: Viết ptrình đường thẳng (Δ) qua A(1;2;3) và cắt cả 2 đường thẳng (d_1), (d_2)

a) $(d_1):\begin{cases}x+8z+23=0\\y-4z+10=0\end{cases}\ (d_2):\begin{cases}x-2z-3=0\\y+2z+2=0\end{cases}$

b) $(d_1):\begin{cases}3x-2y-8=0\\5x+2z-12=0\end{cases}\ (d_2):\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3-2t\ (t\in R)\\z=2-t\end{cases}$

Bài 2: (ĐHTCKT 1999) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A(1;1;-2) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d):

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3},\ (P): x-y-z-1=0.$$

BÀI TOÁN 3: Đường thẳng đi qua 1điểm, vuông góc với 1đường và cắt 1đường thẳng khác.

Bài 1: (ĐHSP TPHCM-95): Viết phương trình đường thẳng đi qua A(0;1;1) và vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt (d_2) ,biết:

$$(d_1):\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}\ (d_2):\begin{cases}x+y-z+2=0\\x+1=0\end{cases}.$$

Bài 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1;1;1) và vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt (d_2) ,biết :

$$(d_1):\begin{cases}x+y+z-3=0\\y+z-1=0\end{cases}\ (d_2):\begin{cases}x-2y-2z+9=0\\y-z+1=0\end{cases}.$$

Bài 3: Viết phương trình đường thẳng cắt cả ba đường thẳng (d_1), (d_2) , (d_3) và vuông góc với vectơ $\vec{u}(1;2;3)$, biết:

$(d_1): \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ $(d_2): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(d_3): \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Bài 4: (ĐHTL-97):Viết phương trình đường thẳng đi qua A(3;-2;-4) song song với mặt phẳng (P): 3x – 2y – 3z – 7 = 0 và cắt đường thẳng (d) biết:

$(d): \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

BÀI TOÁN 4: Hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng

Bài 1: Tìm toạ độ điểm đối xứng của A(-2;1;3) qua mp(P): 2x + y – z – 3 = 0.

Bài 2: (ĐHKTCN-97): Cho A(1;2;3) và mp(P) có phương trình: 2x – y + 2z – 3 = 0

a) Lập phương trình mặt phẳng qua A và song song với (P).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Xác định toạ độ của H.

Bài3: (ĐHGTVTTPHCM-99): Cho ba điểm A(1;1;2), B(-2;1;-1), C(2;-2;-1) .

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC).

Bài 4: (ĐHTCKT-2000): Cho A(2;3;5) và mp(P): 2x + 3y + z – 17= 0

a) Lập phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông gócvới (P).

b) Xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Bài 5: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

(P): 2x + 5y + z + 17 = 0 và $(d): \begin{cases} 3x - y + 4z - 27 = 0 \\ 6x + 3y - z + 7 = 0 \end{cases}$

a) Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

b) Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (P).

Bài 7: (ĐHQG 1998) Cho các điểm A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c) (a,b,c dương). Dựng hình hộp chữ nhật nhận O,A,B,C làm 4 đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với đỉnh O của hình hộp đó.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b) Tính toạ độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD).

c) Tìm điều kiện đối với a,b,c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

BÀI TOÁN 5: Hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng

Bài 1: (ĐHQG TPHCM 1998) Trong không gian 0xyz ,cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình: (P):x + y + z – 3 = 0 và $(d): \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$. Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên (Q).

Bài 2: Lập phương trình hình chiếu vuông góc của giao tuyến (d) của hai mặt phẳng 3x – y + z – 2 = 0 và x + 4y – 5 = 0 lên mặt phẳng 2x – z + 7 = 0.

Bài 3: (ĐHMĐC-98) :Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn 0xyz cho đường thẳng (d) và mp(P) có phương trình: $(d): \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ và (P): x –y + 3z + 8 = 0 . Hãy viết phương trình chính tắc hình chiếu vuông góc của (d) lên (P) .

Bài 4: Trong không gian 0xyz cho đường thẳng (d) và mp(Q) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\ x-2z=0\end{cases}\quad (Q):\begin{cases}x=4+3t_1+t_2\\ y=4+t_1-2t_2\\ z=-5-t_1+t_2\end{cases}\quad (t_1,t_2\in R).$$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên (Q) .

Bài 5: Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(d):\begin{cases}2x-y+z+1=0\\ x+2y-z-3=0\end{cases}\quad (Q): x-y+z+10=0.$$

Hãy viết phương trình chính tắc hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) .

Bài 6: (ĐH Cần Thơ 1998) Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc 0xyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d):\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3} \text{ và (P): } x+y+z+1=0.$$

Hãy viết phương trình chính tắc hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) .

Bài 7: (HVQY-95): Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc 0xyz cho đường thẳng (d) và mp(P) có phương trình $(d):\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ và (P): x + y + z + 1 = 0.

a) Hãy viết phương trình chính tắc hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (Oxy).

b) CMR khi m thay đổi thì (d_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định trong mặt phẳng 0xy.

Bài 8: (ĐHQG-98): Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc 0xyz cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(P): x+y-z+1=0,\qquad (d_1):\begin{cases}2y-z+1=0\\ x+2y=0\end{cases},\qquad (d_2):\begin{cases}3y-z+12=0\\ x-z+2=0\end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P_1) chứa (d_1) và vuông góc với (P).

BÀI TOÁN 6: Hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng

Bài 1: cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}x-2y-2z+9=0\\ y-z+1=0\end{cases}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d) .Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Bài 2: cho điểm A(1;2;-1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d):\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+2\\ z=3t-3\end{cases}\quad t\in R\ .$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d) .Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Bài 3: cho điểm A(2;1;-3) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d) .Từ đó tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (d) .

Bài 4: (ĐHhuế /A,B phân ban 98): Trong không gian 0xyz cho điểm A(2;-1;1) và đường thẳng (d) có phương trình : $(d): \begin{cases} y+z-4=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc (d) .

b) Xác định toạ độ điểm B đối xứng với A qua (d) .

Bài 5: (Đề 60-Va): Lập phương trình đường thẳng qua A(3;2;1) và vuông góc với đường thẳng

(d) : $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ và cắt với đường thẳng đó .

Bài 6: (ĐHTM-2000): Lập phương trình đường thẳng qua A(2;-1;0) và vuông góc với đường thẳng

$(d): \begin{cases} 5x+y+z+2=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$ và cắt với đường thẳng đó .

Bài7: (HV BCVT-2000): Cho 2 đường thẳng (Δ) và (d) có phương trình :

$$(\Delta): \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}, \qquad (d): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua (Δ).

Bài 8: (ĐHHH-1999): Trong không gian cho 2 đường thẳng (d_1), (d_2) :

$$(d_1): \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=4+5t \end{cases} \ t \in R$$

a) (d_1), (d_2) có cắt nhau hay không.

b) Gọi B, C lần lượt là các điểm đối xứng của A(1;0;0) qua (d_1), (d_2). Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 9: Trong không gian 0xyz cho: (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} mx-y=0 \\ z=h \end{cases}, \ (d_2): \begin{cases} mx-y=0 \\ z=-h \end{cases}, \ (d_3): \begin{cases} mx+y=0 \\ z=h \end{cases}, \ (d_4): \begin{cases} mx+y=0 \\ z=-h \end{cases}$$

CMR: các điểm đối xứng A_1, A_2, A_3, A_4 của A bất kì trong không gian qua (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) là đồng phẳng. Lập phương trình mặt phẳng chứa chúng .

BÀI TOÁN 7: Điểm và mặt phẳng

Bài 1: Cho hai điểm A(1;0;2); B(2;-1;3) và mặt phẳng (P): x – 2y + z – 4 = 0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM + BM nhỏ nhất.

Bài 2: Cho hai điểm A(1;1;0); B(0;-1;1) và mặt phẳng (P): x – 2y + z – 4 = 0. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho AM + BM nhỏ nhất.

Bài 3: (ĐH Huế /A.97): Trong không gian hệ tọa độ 0xyz cho mặt phẳng:

(P): 2x – y + z + 1 = 0 và hai điểm A(3;1;0), B(-9;4;9) .

Tìm toạ độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $|MA - MB|$ là lớn nhất .

Bài 4: (ĐHQG-2000):Cho mp(P): x + y + z – 1 = 0 và hai điểm A(1;-3;0), B(5;-1;-2)

a) CMR đường thẳng đi qua A, B cắt mp(P) tại một điểm I, tìm toạ độ điểm đó .

b) Tìm toạ độ điểm M trên mp(P) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: (ĐHMĐC-97)

Trong hệ Oxyz cho ba điểm A(1;4;5), B(0;3;1) ,C(2;-1;0) và mặt phẳng (P): 3x – 3y – 2z – 15 = 0. Gọi G là trọng tâm ΔABC .CMR điều kiện cần và đủ để M nằm trên mặt phẳng (P) có tổng các bình phương khoảng cách đến các điểm A, B, C nhỏ nhất là điểm M phải là hình chiếu vuông góc của điểm G trên mặt phẳng (P) .Xác định toạ độ của điểm M đó.

Bài 6: Cho mặt phẳng (P) 3x + 3y + mz – 6 – m = 0.

a) CMR (P) luôn đi qua một điểm cố định M, Tìm toạ độ của M.

b) Giả sử (P) cắt 0x, 0y, 0z theo thứ tự tại A, B, C .

c) Tính OA, OB, OC để tứ diện O.ABC đạt giá trị nhỏ nhất .

d) Tính OA, OB, OC để 0A + 0B + 0C là nhỏ nhất .

BÀI TOÁN 8: Điểm và đường thẳng

Bài 1: Tìm trên (d) điểm M(x_M, y_M, z_M) sao cho $x^2{}_M + y^2{}_M + z^2{}_M$ nhỏ nhất, biết:

a) $(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \quad t \in R \\ z = t - 3 \end{cases}$

b) $(d): \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z + 7 = 0 \end{cases}$

Bài 2: Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x - y - z - 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$.

Tìm điểm M thuộc (d) sao cho AM + BM nhỏ nhất khi:

a) A(1;2;-1), B(8;1;-2).

b) A(1;2;-1), B(0;1;2).

Bài 3: (ĐHBK-98):Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)có phương trình :

$(d):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases}$ $t\in R$, $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$.

a) Tìm các điểm thuộc đường thẳng (d) để khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mp(P) bằng 1.

b) Gọi K là điểm đối xứng của I(2;-1;3) qua đường thẳng (d). Xác định K.

Bài 4: (ĐHHồng Đức -2000): Cho đường thẳng (d) và mp(P) có phương trình :

$(d):\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$ $t\in R$ và (P): x + 2y + z – 1 = 0.

a) Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$.

b) Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2;0;-1) qua (d). Xác định toạ độ K.

Bài 5: (ĐH Đà Nẵng -2000): Cho điểm A(-4;4;0), B(2;0;4), C(1;2;-1), D(7;-2;3).

a) CMR A,B,C,D đồng phẳng.

b) Tính khoảng cách từ Cđến đường thẳng (AB).

BÀI TOÁN 9: Góc trong không gian

Bài 1: Xác định số đo góc giữa 2 đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

a) $(d_1):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t, \\ z=6+4t \end{cases}$ $(d_2):\begin{cases} 4x+y-19=0 \\ x-z+15=0 \end{cases}$

b) $(d_1):\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases}$, $(d_2):\begin{cases} x=u+2 \\ y=-3+2u \\ z=1+3u \end{cases}$

c) $(d_1):\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$, $(d_2):\begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

Bài 2: (ĐHHH-2000): Cho ba đường thẳng (d_1),(d_2), (d_3) có phương trình :

$(d_1):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2+4t \\ z=2+3t \end{cases}$ $t\in R$, $(d_2):\begin{cases} x-y+4z-3=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$, $(d_3):\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{1}$

a) Xác định cosin góc giữa (d_1), (d_2).

b) Lập phương trình đường thẳng (d) // (d_3) đồng thời cắt cả (d_1), (d_2).

Bài 3: Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mp(P) có phương trình cho bởi :

$(d):\begin{cases} 4x+y-19=0 \\ x-z+15=0 \end{cases}$ và (P): x + y – 7z – 58 = 0.

Bài 4: (CĐSP TP.HCM-99): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$(d): \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và (P):2x + y + z – 1 = 0.

a) Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

b) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

c) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d_1) đi qua A vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 5: (ĐHAN-CS-98): Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ và (P): x + z + 2 = 0.

a) Xác định số đo góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

b) Lập phương trình đthẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) lên mp(P).

BÀI TOÁN 10: Tam giác trong không gian

Bài 1: Cho ΔABC biết A(1;2;5), B(1;4;3), C(5;2;1) và mp(P):x – y – z – 3 = 0.

Lập phương trình đường trung tuyến ,đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A.

Bài 2: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

a) Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc toạ độ) của mặt cầu (S) với 0x, 0y, 0z .Các đỉnh toạ độ của A, B, C và lập phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Lập phương trình các đường trung tuyến , đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của ΔABC.

c) Xác định toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 3 Cho các điểm A(3;1;0), B(2;2;4) ,C(-1;21).

a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Lập phương trình các đường trung tuyến ,đường cao và đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của ΔABC.

c) Xác định toạ độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

V. MẶT CẦU

BÀI TOÁN 1. Phương trình mặt cầu

Bài 1: Trong các phương trình sau đây ,phương trình nào là phương trình của mặt cầu, khi đó chỉ rõ toạ độ tâm và bán kính của nó, biết:

a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 2 = 0$

b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 9 = 0$

c) $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y - 9z + 3 = 0$

Bài 2: Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx - 2my - 6z + m^2 + 4m = 0$

a) Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu .

b) CMR tâm của (S_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 3: Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$(S_m): x^2+y^2+z^2-4mx-2m^2y+8m^2-5=0$

a) Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu .

b) Tìm quĩ tích tâm của họ (S_m) khi m thay đổi.

c) Tìm điểm cố định M mà (S_m) luôn đi qua.

Bài 4: Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$(S_m): x^2+y^2+z^2-2x\sin m-2y\cos m-3=0$

a) Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu .

b) CMR tâm của (S_m) luôn chạy trên một đường tròn (C) cố định trong mặt phẳng 0xy khi m thay đổi.

Bài 5: Lập phương trình mặt cầu (S), biết:

a) Tâm I(2;1;-1), bán kính R = 4.

b) Đi qua điểm A(2;1;-3) và tâm I(3;-2;-1).

c) Đi qua điểm A(1;3;0), B(1;1;0) và tâm I thuộc 0x.

Bài 6: Cho 3 đường thẳng (d_1),(d_2), (d_3) có phương trình :

$(d_1): \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$, $(d_2): \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$, $(d_3): \frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$

a) Lập phương trình đường thẳng (d) cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2) và song song với đường thẳng (d_3).

b) Gs: $(d)\cap(d_1)=\{A\},(d)\cap(d_2)=\{B\}$.Lập phương trình mcầu đường kính AB.

Bài 7: Cho 2 đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

$(d_1): \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ t$\in R$, $(d_2): \begin{cases} x+2z-2=0 \\ y-3=0 \end{cases}$

a) Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

b) Lập ptrình mc (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1), (d_2).

c) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng cách đều (d_1) và (d_2).

BÀI TOÁN 2: Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng

Bài 1: Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

a) Tâm I(1;2;-2) và tiếp xúc với mặt phẳng (P):6x – 3y + 2z – 11 = 0.

b) (CĐGTVT-2000): Tâm I(1;4;-7) và tiếp xúc với mp(P):6x + 6y– 7z + 42 = 0.

c) Bán kính R = 9 và tiếp xúc với (P): x + 2y + 2z + 3 = 0 tại điểm M(1;1;-3).

Bài 2: Viết phương trình mặt cầu có tâm I trên đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), biết:

a) $(d): \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$, (P_1): x + 2y – 2z – 2 = 0. và (P_2): x + 2y - 2z + 4 = 0.

b) $(d):\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+t\\z=-2-t\end{cases}$, $t\in R$. (P_1):3x + 4y + 2z – 10 = 0, (P_2):2x – 3y + 4z – 10 = 0.

Bài 3: (ĐHLN-97): Cho đường thẳng (d) và hai mặt phẳng (P_1) ,(P_2) biết:

$(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$, (P_1) :x + y – 2z + 5 = 0 và (P_2): 2x – y + z + 2 = 0.

a) Gọi A là giao điểm của (d) với (P_1) và (P_2) .Tính độ dài đoạn AB.

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm I trên đường thẳng (d) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

BÀI TOÁN 3: Mặt cầu cắt mặt phẳng

Bài 1: Lập phương trình mặt cầu có tâm tạo giao điểm I của mp(P) và đường thẳng (d) sao cho mp(Q) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có diện tích 12π, biết:

a) $(d):\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2+t\end{cases}$ $t\in R$, (P): x – y – z + 3 = 0.

b) $(d):\begin{cases}x+y+z-3=0\\y-1=0\end{cases}$, (P): x + y – 2 = 0.

Bài 2: Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và cắt mặt phăng (P) theo thiết diện là đường tròn lớn có bán kính bằng 18, biết:

$(d):\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}$ $t\in R$ và (P): y + 4z + 17 = 0.

Bài 3: Trong không gian 0xyz cho A(0;0;-3), B(2;0;-1), và mp(P):3x - 8y + 7z –1 = 0

a) (HVNH-2000): Tìm toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho tam giác đều .

b) Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P): x – y – z – 2 = 0.

BÀI TOÁN 4: Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng

Bài 1: Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

Tâm I(1;2;-1) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$(d):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=-1\end{cases}$ $t\in R$.

Bài 2: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) ,biết :

$(d_1):\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}$ $t\in R$, $(d_2):\begin{cases}x-3y-4=0\\x-y-2z+1=0\end{cases}$.

Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) tại điểm H(3;1;3) và có tâm thuộc đường thẳng (d_2).

Bài 3: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) ,biết :

$(d_1):\begin{cases}2x+y+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$, $(d_2):\begin{cases}3x+y-z+3=0\\2x-y+1=0\end{cases}$.

a) CMR hai đường thẳng đó cắt nhau .Xác định tọa độ giao điểm I của chúng .

b) Viết phương trình tổng quát của mp(P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c) Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1),(d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có phương trình: $(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-3+3t\end{cases}$ $t\in R$.

Bài 4: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1),(d_2) ,biết :

$(d_1):\begin{cases}x=-3+2t\\y=-2+3t\\z=6+4t\end{cases}$ $(t\in R)$, $(d_2):\begin{cases}4x+y-19=0\\x-z+15=0\end{cases}$

a) CMR hai đường thẳng đó cắt nhau .Xác định tọa độ giao điểm I của chúng .

b) Viết phương trình tổng quát của mp(P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bài 5: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết:

$(d_1):\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{-4}$, $(d_2):\dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-2}{9}=\dfrac{z}{12}$

a) CMR hai đường thẳng trên song song với nhau.

b) Viết phương trình tổng quát của mp(P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c) Lập phương trình mcầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc (d) có ptrình:

$(d):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=-1\end{cases}$ $t\in R$.

Bài 6: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết:

$(d_1):\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$, $(d_2):\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+18}{4}$

a) CMR hai đường thẳng đó song song với nhau.

b) Viết phương trình tổng quát của mp(P) đi qua hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

c) Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (d) có phương trình :

$(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-t \\ z=1-t \end{cases}$ $t\in R$.

Bài 7: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết:

$(d_1):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases}$ $(t\in R)$, $(d_2):\begin{cases} x=u+2 \\ y=-3+2u \\ z=1+3u \end{cases}$

a) CMR hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của(d_1) và (d_2).

c) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

d) Lập phương trình mc tiếp xúc với (d_1), (d_2) và tâm thuộc mp(P): x+y+z–2=0.

Bài 8: Trong không gian 0xyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2), biết:

$(d_1):\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$, $(d_2):\begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

a) CMR hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung của(d_1) và (d_2).

c) Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc mặt phẳng (P): 2x – y + 3z – 6 = 0.

BÀI TOÁN 5: Mặt cầu cắt đường thẳng

Bài 1: (ĐHQG-96): Cho điểm I(2;3;-1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$(d):\begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$

a) Xác định VTCP $\vec{a}$ của (d) suy ra ptrình mp(P) qua I và vuông góc với (d).

b) Tính khoảng cách từ I đến (d) từ đó suy ra phương trình mặt cầu (S) có tâm sao cho (S) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B thoả mãn AB = 40.

Bài 2: Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$(d):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases}$ $t\in R$, (P): 2x – y – 2z + 1 = 0.

a) (ĐHBK-98):Tìm toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b) (ĐHBK-98):Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2;-1;3) qua đường thẳng (d). Xác định toạ độ K.

c) Lập phương trình mặt cầu tâm I cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 12.

d) Lập phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π.

BÀI TOÁN 6: Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Bài 1: (ĐH Huế-96): Trong không gian với hệ toạ 0xyz ,cho bốn điểm A(1;0;1), B(2;1;2), C(1;-1;1), D(4;5;-5).

a) Viết ptts của đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 2: (ĐHKT-99) Cho bốn điểm O(0;0;0), A(6;3;0), B(-2;9;1), S(0;5;8)

a) CMR SB vuông góc SA.

b) CMR hình chiếu của cạnh SB lên mp(0AB) vuông góc với OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy xác định toạ dộ của K.

c) Gọi P,Q lần lượt là điểm giữa của các cạnh SO, AB . Tìm toạ độ của điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

Bài 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz ,cho bốn điểm A(4;4;4), B(3;3;1), C(1;5;5), D(1;1;1).

a) (HVKTQS-98): Tìm hình chiếu vuông góc của D lên (ABC) và tính thể tích tứ diện ABCD.

b) (HVKTQS-98): Viết phương trình tham số đường thẳng vuông góc chung của AC và BD.

Bài 4: (HVNHTPHCM-99) Cho bốn điểm A(-1;3;2), B(4;0;-3), C(5;-1;4), D(0;6;1). Viết phương trình tham số của đường thẳng BC .Hạ AH vuông góc BC .Tìm toạ độ của điểm H.

Bài 5: Trong không gian 0xyz, cho hình chóp biết toạ độ bốn đỉnh:

S(5;5;6), A(1;3;0), B(-1;1;4), C(1;-1;4), D(3;1;0).

a) Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính thể tích hình chóp SABCD.

Bài 5: (HVKTMM-97) Cho bốn điểm A(1;2;2), B(-1;2;-1), C(1;6;-1), D(-1;6;2).

a) CMR tứ diện ABCD có cặp cạnh đối diện bằng nhau .

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện ABCD.

BÀI TOÁN 7: Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

Bài 1: Cho hình chóp SABCD có đỉnh $S(-\frac{1}{2},\frac{9}{2},4)$ và đáy ABCD là hình vuông với A(-4,5,0), đường chéo BD có phương trình : $\begin{cases} 7x-y+8=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) Tìm toạ độ các đỉnh của hình chóp.

b) Lập phương trình mặt cầu nội tiêp hình chóp.

Bài 2: Cho ba điểm A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3).

a) Viết phương trình tổng quát các mặt phẳng (0AB), (0BC), (0CA), (ABC).

b) Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện 0ABC .

Bài 3: (HVKTMM-99):Cho bốn điểm A(1;2;2), B(-1;2;-1), C(1;6;-1), D(-1;6;2).

a) CMR tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

b) Xác định toạ độ trọng tâm G của tứ diện .

BÀI TOÁN 8: Vị trí tương đối của điểm và mặt cầu

Bài 1: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - z - 3 = 0$. xét vị trí tương đối của điểm A(-3;5;1) đối với mặt cầu (S).

Bài 2: Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$.Sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết điểm A(1;-2;0).

BÀI TOÁN 9: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Bài 1: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$.Tìm toạ độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, biết:

a) $(d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $t \in R$, b) $(d\ ): \begin{cases} x + 2y + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

BÀI TOÁN 10: Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Bài 1: (ĐHDL-97):Trong không gian với hệ toạ đô trực chuẩn 0xyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2 = 0$, (P): x + z – 1 = 0.

a) Tính bán kính và toạ độ tâm của mặt cầu (S).

b) Tính bán kính và toạ độ tâm của đường tròn giao của (S) và (P).

Bài 2*: (ĐHSPV-99): Cho điểm I(1;2;-2) và mặt phẳng 2x + 2y + z + 5 = 0.

a) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) và (P) là đường tròn có chu vi bằng 8π .

b) CMR mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Q): 2x – 2 = y + 3 = z.

c) Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S).

Bài 3: (BK-2000): Cho hình chóp SABCD với S(3;2;-1), A(5;3;-1), B(2;3;-4), C(1;2;0).

a) CMR: SABC có đáy ΔABC đều và ba mặt bên là các tam giác vuông cân.

b) Tính toạ độ điểm D đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB. M là điểm bất kì thuộc mặt cầu tâm D, bán kính $R = \sqrt{18}$. (điểm M không phụ thuộc mặt phẳng (ABC)). Xét tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB, MC. Hỏi tam giác đó có đặc điểm gì ?

Bài 4: (ĐHPCCC-2000): Cho đường tròn (C) có ptrình: $(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ z = 0 \end{cases}$.

Lập phương trình mặt cầu chứa (C) và tiếp xúc với mặt phẳng: 2x + 2y – z – 6 = 0.

Bài 5: (CĐHQ-96): Cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$, (P): x + 2y + 2z + 11 = 0.

Tìm điểm M sao cho M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M tới mp(P) nhỏ nhất

BÀI TOÁN 11: Vị trí tương đối của hai mặt cầu

Bài 1: Cho hai mặt cầu: $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$,

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

a) CMR hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b) Viết phương trình mcầu qua giao điểm của (S_1) và (S_2) qua điểm M(2,0,1).

Bài 2: Cho 2 mặt cầu: $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

a) CMR hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt cầu qua giao điểm của (S_1), (S_2) và qua M(-2;1;-1).